TUGAS AKHIR – SF 141501

TELEPORTASI KUANTUM INFORMASI SATU QUBIT DAN DUA QUBIT SEMBARANG MELALUI KEADAAN GUGUS EMPAT QUBIT

Fasya Khuzaimah
NRP 01111440000011

Dosen Pembimbing
Agus Purwanto, D.Sc
Heru Sukamto, M.Si

DEPARTEMEN FISIKA
Fakultas Ilmu Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2017

TUGAS AKHIR – SF 141501

TELEPORTASI KUANTUM INFORMASI SATU QUBIT DAN DUA QUBIT SEMBARANG MELALUI KEADAAN GUGUS EMPAT QUBIT

Fasya Khuzaimah
NRP 01111440000011

Dosen Pembimbing
Agus Purwanto, D.Sc
Heru Sukamto, M.Si

DEPARTEMEN FISIKA
Fakultas Ilmu Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2017

"halaman ini sengaja dikosongkan"

FINAL PROJECT – SF 141501

QUANTUM TELEPORTATION OF INFORMATION OF AN ARBITRARY ONE QUBIT AND TWO QUBIT VIA FOUR QUBIT CLUSTER STATE

Fasya Khuzaimah
NRP 01111440000011

Advisors
Agus Purwanto, D.Sc
Heru Sukamto, M.Si

Department of Physics
Faculty of Natural Science
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

”halaman ini sengaja dikosongkan”

LEMBAR PENGESAHAN

TELEPORTASI KUANTUM INFORMASI SATU QUBIT DAN DUA QUBIT SEMBARANG MELALUI KEADAAN GUGUS EMPAT QUBIT

TUGAS AKHIR

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat Memperoleh Gelar
Sarjana Sains
pada
Bidang Studi Fisika Teori
Program Studi S1 Departemen Fisika
Fakultas Ilmu Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Oleh
Fasya Khuzaimah
01111440000011

Disetujui oleh :

Pembimbing Tugas Akhir I	Pembimbing Tugas Akhir II
(Agus Purwanto, D.Sc)	**(Heru Sukamto, M.Si)**
NIP. 19640811 199002.1.001	**NIP. 19841109 201212.1.001**

Surabaya, 8 Januari 2018

”halaman ini sengaja dikosongkan”

TELEPORTASI KUANTUM INFORMASI SATU QUBIT DAN DUA QUBIT SEMBARANG MELALUI KEADAAN GUGUS EMPAT QUBIT

Penulis : Fasya Khuzaimah
NRP : 01111440000011
Departemen : Fisika FIA ITS
Dosen Pembimbing : Agus Purwanto, D.Sc
Heru Sukamto, M.Si

Abstrak

Pada Tugas Akhir ini, telah dilakukan penyelidikan pada keadaan gugus dua, tiga, dan empat qubit. Keadaan-keadaan tersebut memenuhi tiga definisi dari keadaan gugus. Ketiga definisi dari keadaan gugus yaitu tebelit maksimal, ketahanan tinggi, dan apabila sekumpulan operator dioperasikan pada keadaan gugus tersebut maka akan menghasilkan keadaan gugus itu sendiri. Keadaan gugus dua qubit ekuivalen dengan keadaan Bell, keadaan gugus tiga qubit ekuivalen dengan keadaan GHZ, dan keadaan gugus empat qubit ekuivalen dengan keadaaan $\left|\psi\right\rangle_{1234}$. Selain penyelidikan pada keadaan-keadaan gugus, telah dilakukan perumusan teleportasi kuantum informasi satu qubit dan dua qubit sembarang melalui keadaan gugus empat qubit. Diperoleh hasil, keadaan satu qubit dan dua qubit sembarang dapat diteleportasikan melalui keadaan gugus empat qubit.

Kata kunci : Gugus, Qubit, Teleportasi

”halaman ini sengaja dikosongkan”

QUANTUM TELEPORTATION OF INFORMATION OF AN ARBITRARY ONE QUBIT AND TWO QUBIT VIA FOUR QUBIT CLUSTER STATE

Name	**: Fasya Khuzaimah**
NRP	**: 01111440000011**
Departement	**: Physics Faculty of Natural Science ITS**
Supervisior	**: Agus Purwanto, D.Sc**
	Heru Sukamto, M.Si

Abstract

In this Final Project, investigation has been made on two, three, and four qubit cluster state. These states fulfill three definitions of cluster states. The three definitions of cluster states are maximally entangled, high persistency, and a set of operators which is operated on the cluster states will produce the cluster states themselves. A two qubit cluster state is equivalent to Bell state, a three qubit of cluster state is equivalent to GHZ state, and a four qubit cluster state is equivalent to $\left|\psi\right\rangle_{1234}$ *state. In addition to investigation on cluster states, formulations of quantum teleportation of information of an arbitrary one qubit and two qubit via four qubit cluster state have been made. The results are information or state of an arbitrary one qubit and two qubit can be teleported by four qubit cluster state.*

Keywords : Cluster, Qubit, Teleportation

”halaman ini sengaja dikosongkan”

KATA PENGANTAR

Puji syukur Penulis panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat serta hidayah-Nya, sehingga dapat menyelesaikan Laporan Tugas Akhir di Departemen Fisika FIA ITS dengan judul:

“Teleportasi Kuantum Informasi Satu Qubit dan Dua Qubit Sembarang Melalui Keadaan Gugus Empat Qubit”

Penulis menyadari bahwa terselesainya penyusunan Tugas Akhir ini tidak terlepas dari bantuan dan dukungan dari berbagai pihak, maka pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Ayah, Ibu, Nenek, dan Aki tercinta yang telah memberi pengajaran, pemahaman, doa, dan dukungan terbaik bagi Penulis.
2. Bapak Agus Purwanto, D.Sc dan Heru Sukamto, M.Si selaku dosen pembimbing yang sangat membantu dalam memberi dukungan, bimbingan, dan wawasan sehingga Penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini.
3. Bapak Dr. Yono Hadi Pramono, M.Eng selaku Ketua Departemen Fisika FIA ITS.
4. Bapak Dr. rer. nat Bintoro Anang Subagyo serta Bapak dan Ibu Dosen yang telah mendidik dan memberi ilmu kepada Penulis selama berkuliah di Departemen Fisika FIA ITS.
5. Bapak I Nengah Artawan, M.Si, M. Afif Ismail, Bapak Lila Yuwana, M.Si, Mas Anom, Mas Dwi, dan Mbak Ira yang sangat membantu Penulis dalam mempelajari dan memahami Tugas Akhir ini.
6. M. Fauzan Syahbana dan Fathna Khasheba sebagai adik Penulis serta Aa Cipta, Teteh Nurul, Tante, Bibi, dan Om yang selalu memberikan doa dan dukungan kepada Penulis.

7. Teman-teman LaFTiFA, Nusur, Bayu, Kasyfil, Doni, Dittho, Mbak Rafika, Mas Bayu, Mas Fatich, dan Mbak Afidah yang menemani Penulis ketika berada di LaFTiFA.
8. Polaris in Surabaya (Ayu, Fatiya, dll), SOPPER (Megami, Anita, Tri, Geby, dll), kakak-kakak dan adik-adik Bonlap in Surabaya, dan Agung yang selalu membantu, menemani, dan mendukung Penulis sejak SMA.
9. Teman-teman ANTARES 2014, FOSIF 37/38 (Fara, Nindita, Kiki, Nurul Yanti, Dian, Levina, Dina Mardiana, Sulis, Silvi, Nurul Maulidiyah, Sari, Retno, Ojan, Dita, Elia, April, Firda, Anita, Lutfi, Ria, Haidar, Irma Septi, Natazsa, Muthia, Nilna, dll), dan Bang Indra yang selalu membantu, mendukung, dan menemani Penulis selama penulis berkuliah di Departemen Fisika FIA ITS.
10. Mas-mas dan Mbak-mbak 2010, 2011, 2012, dan 2013 serta alumni Departemen Fisika FIA ITS.
11. Adik-adik 2015, 2016 (Diah Eka Savitri, dkk), dan 2017.
12. Semua pihak yang telah membantu, mendukung, dan mendoakan penulis yang tidak dapat disebutkan satu per satu.

Semoga Tugas Akhir ini bermanfaat bagi pihak-pihak yang berkepentingan serta dapat menjadi sumbangan bagi almamater tercinta dalam pengembangan ilmu pengetahuan dan teknologi di masa yang akan datang.

Surabaya, Januari 2017
Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

”halaman ini sengaja dikosongkan”

DAFTAR TABEL

”halaman ini sengaja dikosongkan”

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Sampai akhir abad 19, interpretasi mengenai fenomena fisik makroskopik dijelaskan pada hukum Newton yang menjelaskan tentang mekanika, akustik, dan termal, dan persamaan Maxwell yang menjelaskan tentang listrik, magnet, dan optika. Hukum klasik tidak dapat mendeskripsikan dan memprediksi fenomena fisis dualisme gelombang-partikel, radiasi benda hitam, dan spektrum atom hidrogen. Pada tahun 1900, Max Planck memperkenalkan kuantisasi energi kuantum untuk memberikan penjelasan yang masuk akal mengenai radiasi benda hitam dimana perubahan energi antara materi dan radiasi bernilai diskrit. Hal ini menjadi awal lahirnya fisika kuantum. Kemudian, pada tahun 1913, Niels Bohr memperkenalkan spektrum emisi atom hidrogen. Niels Bohr mengeluarkan potsulat tentang diskritisasi yang sebelumnya kuantitas fisis selalu dianggap kontinyu. Pada tahun 1926, Erwin Schrodinger memperkenalkan persamaan gelombang mengenai dualisme dari partikel-gelombang. Persamaan gelombang tersebut merepresentasikan keadaan fisis dari sistem kuantum dan dianggap sebagai teori yang lengkap. Namun, Albert Einstein, Boris Podolsky, dan Nathan Rosen (yang dikenal sebagai EPR) mempertanyakan kelengkapan teori dari persamaan gelombang tersebut. Mereka menunjukannya melalui *Gedanken experiment* (eksperimen pemikiran) yang diberi istilah EPR paradoks, menunjukkan bahwa persamaan gelombang dalam mekanika kuantum tidak memenuhi dua syarat kelengkapan dari suatu teori yaitu syarat elemen realitas dan syarat lokalitas (Einstein, dkk, 1935).

Pertama, menurut prinsip elemen realitas EPR, mekanika kuantum tidak memenuhi prinsip tersebut dikarenakan apabila diberikan suatu persamaan gelombang yang mengandung suatu kuantitas momentum yang merupakan konstanta dan kuantitas koordinat yang merupakan variabel, lalu dilakukan pengukuran momentum maka akan diperoleh nilai dari momentum itu sehingga momentum tersebut dikatakan elemen realitas. Namun, apabila dilakukan pengukuran koordinat atau posisi maka nilai dari posisi tersebut tidak dapat diprediksi secara pasti karena bernilai probabilitas, maka posisi tersebut tidak memenuhi elemen realitas. Sehingga EPR menarik kesimpulan awal persamaan gelombang dalam mekanika kuantum yang tidak lengkap atau kuantitas momentum dan kuantitas posisi tersebut tidak bisa muncul secara simultan dalam realitasnya.

Kedua, menurut syarat lokalitas EPR, dimisalkan terdapat dua partikel yang semula berinteraksi pada waktu tertentu, kemudian kedua partikel tersebut dipisahkan sangat jauh hingga keduanya tidak dapat saling berinteraksi satu sama lain. Apabila salah satu dari partikel tersebut diganggu atau dilakukan pengukuran, misalkan pengukuran momentum, maka dapat diprediksi secara tepat nilai momentum pada partikel pertama adalah p dan dapat juga diprediksi secara tepat bahwa nilai momentum partikel kedua adalah $-p$. Dengan kata lain apabila salah satu partikel diganggu, maka partikel yang lainnya akan merasakan gangguan tersebut. Hal itu dianggap melanggar prinsip lokalitas EPR dikarenakan kedua partikel sudah tidak dapat lagi berinteraksi. Sehingga EPR menganggap bahwa mekanika kuantum belum lengkap.

Hal yang dikemukakan EPR mengenai persamaan gelombang mekanika kuantum yang mendeskripsikan dua partikel yang telah dipisahkan sangat jauh seharusnya sudah tidak berada dalam keadaan yang lokal menimbulkan gagasan kepada John Stewart Bell untuk melakukan perumusan dengan menambahkan sebuah variabel tambahan pada persamaan gelombang mekanika kuantum untuk membuktikan hal tersebut. Namun, permasalahan EPR mengenai keadaan non lokal pada persamaan gelombang mekanika kuantum yang mendeskripsikan dua partikel yang dipisah sangat jauh tidak terbukti. Hal itu menunjukkan antara kedua partikel yang dipisahkan sangat jauh yang disebutkan dalam paper EPR tetap berada dalam keadaan lokal atau terbelit (Bell, 1964).

Secara fisis, keadaan terbelit mendeskripsikan dua sistem yang telah dipisah sangat jauh sehingga tidak dapat saling berinteraksi satu sama lain kemudian salah satu dari kedua sistem itu diberi gangguan, maka sistem yang lainnya merasakan gangguan yang diberikan pada sistem pertama. Keadaan terbelit yang dideskripsikan dalam paper EPR dikenal dengan keadaan terbelit EPR. Selain keadaan terbelit EPR, terdapat keadaan terbelit lainnya salah satunya yaitu keadaan GHZ. Keadaan terbelit sangat berguna dalam aplikasi fisika kuantum, salah satunya pada dalam teleportasi kuantum. Teleportasi kuantum adalah mekanisme pengiriman informasi dalam informasi kuantum. Teleportasi kuantum pertama kali dikenalkan oleh Charles Henry Bennett dan kawan-kawan pada tahun 1993. Teleportasi kuantum yang dirumuskan mereka yaitu mengenai pengiriman suatu keadaan atau informasi satu qubit sembarang dari pengirim bernama Alice menuju penerima bernama Bob melalui suatu saluran. Saluran yang digunakan yaitu keadaan terbelit EPR. Namun pada paper Bennett dan kawan-kawan, saluran (keadaan terbelit) yang digunakan dalam pengiriman keadaan atau informasi masih sangat sederhana dikarenakan keadaan terbelit EPR adalah keadaan dua qubit. Teleportasi informasi satu qubit sembarang juga telah berhasil dilakukan melalui keadaan terbelit tiga qubit yaitu keadaan GHZ (Karlsson dan Bourennane, 1998). Namun, teleportasi informasi dua qubit sembarang tidak berhasil dilakukan melalui keadaan GHZ (Ira, 2017). Lalu, bagaimana apabila keadaan atau informasi satu qubit dan dua qubit sembarang diteleportasikan dengan keadaan terbelit lain dengan qubit yang lebih banyak? Keadaan terbelit dengan banyak qubit dikenal dengan keadaan gugus (*cluster*). Keadaan gugus merupakan keadaan yang sangat terbelit dari banyak qubit yang berada pada sekumpulan kisi-kisi atom dengan model Ising. Model Ising adalah model atom yang diasumsikan memiliki spin atom dengan keadaan spin *up* atau spin *down*. Keadaan gugus memiliki kelebihan dibandingkan keadaan terbelit lainnya karena keadaan gugus merupakan keadaan terbelit maksimal dan sulit untuk dibuat menjadi keadaan yang tidak terbelit atau keadaan terpisah (Briegel dan Raussendorf, 2001). Oleh karena itu, dalam Tugas Akhir ini dilakukan teleportasi kuantum informasi satu qubit dan dua qubit sembarang melalui saluran atau protokol keadaan gugus. Keadaan gugus yang digunakan yaitu keadaan gugus empat qubit. Selain itu, di dalam Tugas Akhir ini dilakukan penyelidikan mengenai sifat atau definisi dari keadaan gugus.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, permasalahan yang akan dibahas adalah penyelidikan keadaan terbelit gugus dan perannya dalam teleportasi kuantum informasi.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan yang ingin dicapai pada Tugas Akhir ini adalah menyelidiki sifat atau definisi keadaan terbelit gugus dan merumuskan teleportasi kuantum informasi melalui protokol keadaan gugus.

1.4 Batasan Masalah

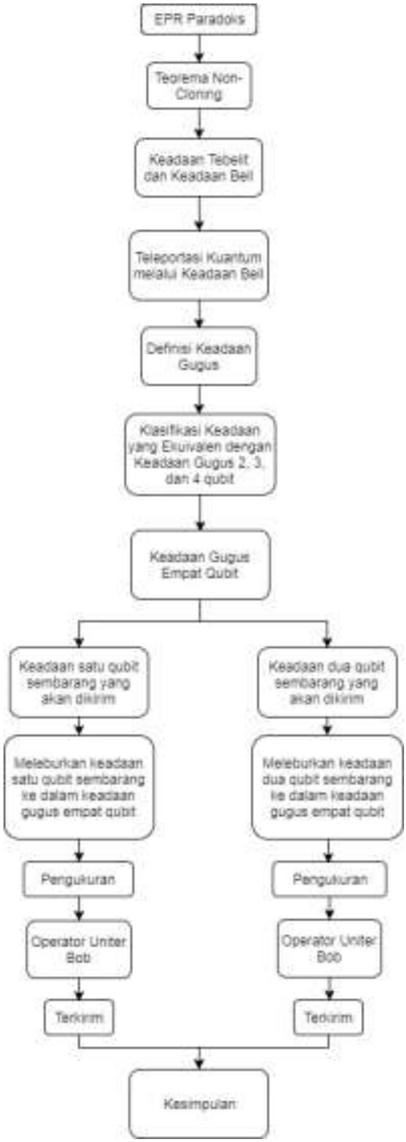
Pada penelitian Tugas Akhir ini, permasalahan hanya dibatasi pada penyelidikan keadaan terbelit gugus dua, tiga, dan empat qubit serta teleportasi kuantum informasi keadaan satu qubit dan dua qubit sembarang melalui keadaan gugus empat qubit.

1.5 Metodologi Penelitian

Dalam penelitian Tugas Akhir ini akan dilakukan perumusan teleportasi kuantum informasi satu qubit dan dua qubit sembarang melalui keadaan gugus empat qubit dengan skema penelitian pada Gambar 1.1.

1.6 Manfaat Penulisan

Penelitian Tugas Akhir ini diharapkan dapat bermanfaat untuk memberikan informasi dan pemahaman mengenai keadaan gugus dan perumusan teleportasi kuantum informasi keadaan satu qubit dan dua qubit sembarang melalui keadaan gugus empat qubit.



Gambar 1.1 Skema Penelitian

BAB II
TELEPORTASI KUANTUM

2.1 Einstein-Podolsky-Rosen Paradoks

Albert Einstein, Boris Podolsky, dan Nathan Rosen menyebutkan bahwa teori yang lengkap adalah dimana suatu elemen fisis pada teori tersebut sesuai dengan setiap elemen realitasnya. Kondisi yang riil dari suatu kuantitas fisis dalam teori harus dapat diprediksi secara tepat tanpa mengganggu sistem dari kondisi tersebut. Namun, kasus dua kuantitas fisis yang ada dalam mekanika kuantum dideskripsikan oleh dua operator non-komut, yang berarti kedua realitas dari kuantitas fisis itu tidak dapat muncul secara bersamaan dalam kenyataannya. Selain itu, pengukuran dalam mekanika kuantum pada suatu sistem yang sebelumnya berinteraksi dengan sistem lainnya, akan mempengaruhi hasil pengukuran pada sistem lainnya tersebut walaupun kedua sistem sudah tidak saling berinteraksi lagi. Oleh karena itu, Eintein-Podolsky-Rosen (EPR) menyatakan bahwa deskripsi dari realitas fisis yang diberikan oleh fungsi gelombang dalam mekanika kuantum itu tidak lengkap.

2.1.1 Realitas

Persyaratan untuk sebuah teori yang lengkap yaitu setiap elemen realitas fisis harus mempunyai pasngan dalam toeri fisisnya. Dengan kata lain, elemen teori fisis dalam suatu teori merupakan elemen realitas fisis dari suatu objek. Sebagai contoh, pada persamaan gelombang

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{2.1}$$

yang mana *y* dalam teori fisis persamaan gelombang tali menggambarkan simpangan gelombang tali, *x* menggambarkan arah rambat gelombang tali, *v* menggambarkan kecepatan rambat gelombang tali, dan *t* menggambarkan waktu ketika gelombang tali merambat dalam realitasnya. Contoh yang lain dimisalkan pada rumus gerak jatuh bebas

$$v = \sqrt{2gh} \tag{2.2}$$

v dalam teori fisis menggambarkan kecepatan dari sebuah benda yang bergerak jatuh dan *h* dalam teori fisis menggambarkan ketinggian awal dari benda yang mengalami gerak jatuh bebas.

Elemen realitas fisis tidak dapat ditentukan oleh pertimbangan filosofis, tetapi harus ditemukan oleh sebuah penarikan kesimpulan hasil eksperimen dan pengukuran (secara matematis). Maksudnya suatu teori dikatakan lengkap adalah *jika tanpa mengganggu (tidak mengukur melalui eksperimen) apapun pada sebuah sistem, kita dapat memprediksi dengan tepat nilai dari sebuah kuantitas fisis dan lalu di sana berada sebuah elemen realitas fisis yang sesuai dengan nilai kuantitas fisis ini*.

Untuk mengilustrasikan ide mengenai realitas fisis dalam mekanika kuantum, anggap mekanika kuantum mendeskripsikan tingkah laku sebuah partikel yang memiliki derajat kebebasan tunggal. Yang mana konsep dasar dari teori tersebut adalah konsep keadaan yang dikarakterisai secara lengkap oleh fungsi gelombang ψ. Anggap kuantitas A dapat diobservasi secara fisis dengan huruf yang sama, a. Jika ψ adalah fungsi eigen dari operator A, maka

$$\psi' \equiv A\psi = a\psi \tag{2.3}$$

dimana adalah a sebuah angka, maka kuantitas fisis A memiliki nilai pasti a kapanpun partikel berada dalam keadaan yang diberikan oleh ψ.

Sesuai dengan kriteria EPR pada elemen realitas, untuk sebuah partikel dalam keadaan yang diberikan oleh ψ, terdapat sebuah elemen realitas fisis yang sesuai dengan kuantitas fisis A. Contohnya:

$$\psi = e^{(2\pi i/h)p_o x} \tag{2.4}$$

dimana h adalah konstanta Planck, p_o adalah suatu konstanta dan x adalah variabel bebas. Karena operator yang sesuai pada momentum partikel adalah

$$p = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x} \tag{2.5}$$

Maka akan diperoleh

$$\begin{aligned} \psi' \equiv p\psi &= \left(\frac{h}{2\pi i}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x} \\ &= \left(\frac{h}{2\pi i}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{(2\pi i/h)p_o x}\right) \\ &= p_o e^{(2\pi i/h)p_o x} \\ &= p_o\psi \end{aligned} \tag{2.6}$$

maka dalam keadaan yang diberikan oleh persamaan (2.4), momentumnya memiliki nilai pasti p_o. Oleh karena itu, momentum yang diberikan pada persamaan (2.4) bernilai riil atau memenuhi elemen realitas.

Di sisi lain jika ψ dilakukan pengukuran koordinat partikel dengan operator q, yang mana adalah operator pengali oleh variabel bebas, maka pada persamaan (2.3) tidak dapat lagi dikatakan bahwa kuantitas fisis A memiliki nilai yang pasti.

$$q\psi = x\psi \neq a\psi \tag{2.7}$$

Sesuai dengan mekanika kuantum, hasil pengukuran koordinat merupakan probabilitas relatif yang terbentang antara a dan b.

$$P(a,b)=\int_a^b \overline{\psi}\psi\, dx=\int_a^b dx=b-a \tag{2.8}$$

Karena probabilitas ini tidak bergantung pada a, tetapi hanya bergantung pada selisih $b-a$, maka semua nilai koordinat merupakan suatu probabilitas.

Nilai pasti koordinat untuk partikel pada persamaan (2.4) tidak dapat diprediksi, tetapi hanya bisa diperoleh dengan melakukan pengukuran secara langsung (eksperimen). Namun, melakukan pengukuran secara langsung itu mengganggu partikel dan mengubah keadaannya. Sehingga setelah nilai koordinat partikel ditemukan, partikel tidak bisa lagi termasuk dalam keadaan yang diberikan oleh persamaan (2.4). Oleh karena itu, kesimpulan EPR dari mekanika kuantum adalah *ketika momentum suatu partikel dapat diketahui (memiliki pasangan antara teori fisis dan realitas fisis), koordinatnya tidak dapat diketahui sehingga koordinatnya tidak memiliki realitas fisis*.

Lebih umum lagi, hal itu ditunjukan dalam mekanika kuantum bahwa jika operator-operator yang sesuai dengan dua kuantitas fisis, katakanlah operator A dan B, tidak komut, sehingga $AB \neq BA$, maka hasil yang tepat dari salah satu kuantitas fisis tersebut akan menghalangi hasil kuantitas fisis lainnya. Dan apabila dilakukan eksperimen untuk mendapatkan kuantitas fisis lain tersebut, maka eksperimen itu akan mengubah keadaan sistem sehingga akan merubah hasil dari kuantitas fisis yang pertama.

Berdasarkan hal ini, EPR mempertanyakan *(1) deskripsi mekanika kuantum terhadap realitas yang diberikan dalam fungsi gelombang itu tidak lengkap atau (2) ketika operator-operator* *yang sesuai dengan kuantitas fisis tidak komut maka dua kuantitas tersebut tidak dapat memiliki realitas yang simultan*. Jika kedua kuantitas fisis itu memiliki realitas yang simultan dan nilai yang pasti maka hal fungsi gelombang akan memenuhi deskripsi lengkap mengenai realitas fisis yang diberikan. Namun, jika fungsi gelombang menyediakan deskripsi lengkap mengenai realitas fisis, maka nilai dari kuantitas fisis tersebut dapat diprediksi. Hal ini tidak menjadi masalah karena sesuai dengan kriteria elemen realitas yang disebutkan sebelumnya.

Di dalam mekanika kuantum, fungsi gelombang selalu diasumsikan mengandung deskripsi lengkap mengenai realitas fisis dari sistem. Asumsi ini akan masuk akal untuk informasi yang dapat diperoleh dari fungsi gelombang secara tepat tanpa harus mengubah keadaan sistem (melakukan eksperimen). Sehingga dapat disimpulkan bahwa asumsi ini kontradiksi dengan kriteria realitas fisis yang diberikan di atas (Einstein, Podolsky, Rosen, 1935).

2.1.2 Lokalitas

Anggap terdapat dua sistem, sistem I dan II. Sistem tersebut berinteraksi pada $t=0$ sampai $t=T$. Setelah $t=T$, dianggap tidak ada lagi interaksi antara keduanya. Keadaan kedua sistem sebelum $t=0$ diketahui. Dengan bantuan persamaan Schrodinger, keadaan kombinasi sistem I+II dapat dihitung pada waktu sembarang (khususnya untuk $t>T$). Fungsi gelombang dilambangkan oleh Ψ. Kita tidak dapat menghitung keadaan meskipun salah satu dari kedua sistem ditinggalkan setelah interaksi. Sesuai dengan mekanika kuantum, hal ini hanya dapat dilakukan dengan *proses reduksi paket gelombang*.

Dimisalkan kita ambil nilai eigen secara umum non-degenerasi

$$Au_1(x_1) = a_1u_1(x_1)$$
$$Au_2(x_1) = a_2u_2(x_1)$$
$$Au_3(x_1) = a_3u_3(x_1)$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$Au_n(x_1) = a_nu_n(x_1) \tag{2.9}$$

dimana $a_1, a_2, a_3, ...$ adalah nilai eigen dari kuantitas fisis A dengan operator A yang bekerja pada fungsi eigen $u_1(x_1), u_2(x_1), u_3(x_1), ...$ dan x_1 adalah variabel yang mendeskripsikan sistem pertama. Lalu, Ψ dianggap sebagai fungsi x_1 yang dapat diekspresikan sebagai

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x_2) u_n(x_1) \tag{2.10}$$

dimana x_2 merupakan variabel yang mendeskripsikan sistem kedua. Di sini $\psi_n(x_2)$ dianggap hanya sebagai koefisien ekspansi Ψ yang menjadi deret fungsi orthogonal $u_n(x_1)$ (koefisien dari $u_n(x_1)$). Kemudian, kuantitas A diukur dan ditemukan bahwa memiliki nilai a_k .

$$\langle A \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* A \Psi dx = a_k \tag{2.11}$$

Lalu dilakukan proses reduksi paket gelombang sehingga setelah pengukuran, sistem pertama akan ditinggalkan dalam keadaan yang diberikan oleh fungsi gelombang $u_k(x_1)$ dan sistem kedua ditinggalkan dalam keadaan yang diberikan oleh fungsi gelombang $\psi_k\left(x_2\right)$. Sehingga paket gelombang yang diberikan oleh persamaan (2.10) menjadi $\psi_k\left(x_2\right)u_k\left(x_1\right)$.

$$\begin{aligned} A\Psi\left(x_1,x_2\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(x_2)Au_n(x_1) \\ &= \psi_1(x_2)a_1u_1(x_1)+\psi_2(x_2)a_2u_2(x_1) \\ &\quad +\ldots+\psi_k(x_2)a_ku_k(x_1)+\ldots \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned} A\Psi\left(x_1,x_2\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(x_2)Au_n(x_1) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(x_2)a_ku_n(x_1) \\ &= a_k\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(x_2)u_n(x_1) \\ &= a_k[\psi_1(x_2)u_1(x_1)+\psi_2(x_2)u_2(x_1) \\ &\quad +\ldots+\psi_k(x_2)u_k(x_1)+\ldots] \end{aligned} \tag{2.13}$$

Kemudian dilakukan eleminasi pada persamaan (2.12) dan (2.13)

$$\begin{aligned} A\Psi\left(x_1,x_2\right)-A\Psi\left(x_1,x_2\right)=0 \\ &= \left(a_1-a_k\right)\psi_1(x_2)u_1(x_1) \\ &\quad +\left(a_2-a_k\right)\psi_2(x_2)u_2(x_1) \\ &\quad +\ldots+\left(a_k-a_k\right)\psi_k(x_2)u_k(x_1) \\ &\quad +\ldots \end{aligned} \tag{2.14}$$

Karena hasil eleminasi persamaan (2.12) dan (2.13) adalah nol, untuk

$$\left(a_1 - a_k\right)\psi_1(x_2)u_1(x_1) = 0 \tag{2.15}$$

maka

$$\psi_1(x_2)u_1(x_1) = 0 \tag{2.16}$$

karena

$$\left(a_1 - a_k\right) \neq 0 \tag{2.17}$$

Untuk

$$\left(a_2 - a_k\right)\psi_2(x_2)u_2(x_1) = 0 \tag{2.18}$$

maka

$$\psi_2(x_2)u_2(x_1) = 0 \tag{2.19}$$

karena

$$\left(a_2 - a_k\right) \neq 0 \tag{2.20}$$

Dan seterusnya, hingga untuk

$$\left(a_k - a_k\right)\psi_k(x_2)u_k(x_1) = 0 \tag{2.21}$$

maka

$$\left(a_k - a_k\right) = 0 \tag{2.22}$$

sehingga

$$\psi_n(x_2)u_n(x_1) = 0 \text{ jika } n \neq k \tag{2.23}$$

akibatnya

$$\begin{aligned}\Psi\left(x_1, x_2\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n\left(x_2\right)u_n\left(x_1\right) \\ &= \psi_k\left(x_2\right)u_k\left(x_1\right) \end{aligned} \tag{2.24}$$

Jika sekumpulan fungsi $u_n\left(x_1\right)$ ditentukan oleh kuantitas fisis A, lalu dipilih kuantitas fisis B yang kita ambil nilai eigen secara umum non-degenerasi $b_1, b_2, b_3, ...$ dan fungsi eigen $v_1(x_1), v_2(x_1), v_3(x_1), ...$

$$\begin{aligned} Bv_1(x_1) &= b_1 v_1(x_1) \\ Bv_2(x_1) &= b_2 v_2(x_1) \\ Bv_3(x_1) &= b_3 v_3(x_1) \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ Bv_s(x_1) &= b_s v_s(x_1) \end{aligned} \tag{2.25}$$

Maka seperti pada persamaan (2.10), Ψ dapat dituliskan menjadi

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_s(x_2) v_s(x_1) \tag{2.26}$$

Dimana $\varphi_s(x_2)$ adalah koefisien dari $v_s(x_1)$. Kemudian, kuantitas B diukur dan ditemukan bahwa memiliki nilai b_r.

$$\langle B \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* B \Psi dx = b_r \tag{2.27}$$

Lalu dilakukan proses reduksi paket gelombang sehingga setelah pengukuran, sistem pertama akan ditinggalkan dalam keadaan yang diberikan oleh fungsi gelombang $v_s(x_1)$ dan sistem kedua ditinggalkan dalam keadaan yang diberikan oleh fungsi gelombang $\varphi_s(x_2)$. Sehingga paket gelombang yang diberikan oleh persamaan (2.27) menjadi $\varphi_r(x_2) v_r(x_1)$.

$$\begin{aligned} B\Psi(x_1, x_2) &= \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_s(x_2) B v_s(x_1) \\ &= \varphi_1(x_2) b_1 v_1(x_1) + \varphi_2(x_2) b_2 v_2(x_1) \end{aligned}$$

$$+\ldots+\varphi_r(x_2)b_r v_r(x_1)+\ldots \tag{2.28}$$

$$B\Psi\left(x_1,x_2\right)=\sum_{s=1}^{\infty}\varphi_s(x_2)Bv_s(x_1)$$

$$=\sum_{s=1}^{\infty}\varphi_s(x_2)b_r v_s(x_1)$$

$$=b_r\sum_{s=1}^{\infty}\varphi_s(x_2)v_s(x_1)$$

$$=b_r[\varphi_1(x_2)v_2(x_1)+\varphi_2(x_2)v_2(x_1)$$

$$+\ldots+\varphi_r(x_2)v_r(x_1)+\ldots] \tag{2.29}$$

Kemudian dilakukan eleminasi pada persamaan (2.28) dan (2.29)

$$B\Psi\left(x_1,x_2\right)-B\Psi\left(x_1,x_2\right)=0$$

$$=\left(b_1-b_r\right)\varphi_1(x_2)v_1(x_1)$$

$$+\left(b_2-b_r\right)\varphi_2(x_2)v_2(x_1)$$

$$+\ldots+\left(b_r-b_r\right)\varphi_r(x_2)v_r(x_1)$$

$$+\ldots \tag{2.30}$$

Karena hasil eleminasi persamaan (2.28) dan (2.29) adalah nol, untuk

$$\left(b_1-b_r\right)\varphi_1(x_2)v_1(x_1)=0 \tag{2.31}$$

maka

$$\varphi_1(x_2)v_1(x_1)=0 \tag{2.32}$$

karena

$$\left(b_1-b_r\right)\neq 0 \tag{2.33}$$

Untuk

$$\left(b_2 - b_r\right)\varphi_2(x_2)v_2(x_1) = 0 \tag{2.34}$$

maka

$$\varphi_2(x_2)v_2(x_1) = 0 \tag{2.35}$$

karena

$$\left(b_2 - b_r\right) \neq 0 \tag{2.36}$$

Dan seterusnya, hingga untuk

$$\left(b_r - b_r\right)\varphi_r(x_2)v_r(x_1) = 0 \tag{2.37}$$

maka

$$\left(b_r - b_r\right) = 0 \tag{2.38}$$

sehingga

$$\varphi_s(x_2)v_s(x_1) = 0 \text{ jika } s \neq r \tag{2.39}$$

akibatnya

$$\Psi\left(x_1, x_2\right) = \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_s(x_2)v_s(x_1)$$

$$= \varphi_r(x_2)v_r(x_1) \tag{2.40}$$

Berdasarkan pengukuran di atas, pengukuran berbeda yang dilakukan pada sistem pertama, lalu sistem kedua dibiarkan saja dalam keadaan dengan fungsi gelombang yang berbeda dengan sistem pertama. Di sisi lain, pada waktu pengukuran, kedua sistem sudah tidak lagi berinteraksi sehingga tidak ada perubahan atau pengaruh apapun pada sistem kedua akibat pengukuran pada sistem pertama. Maka berdasarkan hal itu, *merupakan sesuatu yang mungkin untuk menempatkan dua fungsi gelombang yang berbeda (contohnya ψ_k dan φ_r) pada realitas yang sama (sistem kedua setelah berinteraksi dengan sistem pertama).*

Sekarang diberikan dua fungsi gelombang ψ_k dan φ_r, merupakan fungsi eigen dari dua operator tidak komut yang masing-masing berhubungan dengan kuantitas fisis P dan Q. Terdapat masalah dalam fungsi gelombang yang diberikan oleh mekanika kuantum. Dianggap dua sistem adalah dua partikel dan

$$\psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(\frac{2\pi i}{h}\right)(x_1 - x_2 + x_o)p} dp \tag{2.41}$$

dimana x_o adalah konstanta. Biarkan A menjadi operator kuantitas momentum partikel pertama seperti pada persamaan (2.6),

$$A = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_1} \tag{2.42}$$

sehingga fungsi eigen untuk partikel pertama menjadi

$$u_p(x_1) = e^{\left(\frac{2\pi i}{h}\right)p x_1} \tag{2.43}$$

maka persamaan (2.43) memiliki nilai eigen *p*.

$$\begin{aligned} A u_p(x_1) &= \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_1} e^{\left(\frac{2\pi i}{h}\right)p x_1} \\ &= \frac{h}{2\pi i}\left(\frac{2\pi i}{h}\right) p e^{\left(\frac{2\pi i}{h}\right)p x_1} \\ &= p u_p(x_1) \end{aligned} \tag{2.44}$$

Karena sistem ini merupakan sistem dari partikel bebas, maka sistem ini dianggap sebagai sistem yang kontinyu, maka persamaan (2.10) menjadi

$$\Psi\left(x_1,x_2\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi_p\left(x_2\right)u_p\left(x_1\right)dp$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{\left(\frac{2\pi i}{h}\right)\left(x_1-x_2+x_o\right)p}dp$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\left(\frac{2\pi i}{h}\right)\left(x_2-x_o\right)p}e^{\left(\frac{2\pi i}{h}\right)px_1}dp \qquad (2.55)$$

Sehingga diperoleh fungsi gelombang untuk partikel kedua

$$\psi_p(x_2)=e^{-\left(\frac{2\pi i}{h}\right)\left(x_2-x_o\right)p} \qquad (2.56)$$

yang mana $\psi_p(x_2)$ adalah fungsi eigen dari operator momentum *P*. Apabila operator *P* dioperasikan pada $\psi_p(x_2)$ akan memiliki nilai eigen –*p*.

$$P=\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_2} \qquad (2.57)$$

$$P\psi_p(x_2)=\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(e^{-\left(\frac{2\pi i}{h}\right)\left(x_2-x_o\right)p}\right)$$

$$=\frac{h}{2\pi i}\left(-\frac{2\pi i}{h}\right)pe^{-\left(\frac{2\pi i}{h}\right)\left(x_2-x_o\right)p}$$

$$=-p\psi_p(x_2) \qquad (2.58)$$

Di sisi lain, jika operator B yang mana adalah operator koordinat untuk partikel pertama, maka fungsi eigen yang sesuai dengan operator B adalah

$$v_x(x_1)=\delta\left(x_1-x\right) \qquad (2.59)$$

dimana $\delta(x_1 - x)$ adalah fungsi Delta-Dirac. Apabila operator B dioperasikan pada $v_s(x_1)$ maka akan memiliki nilai eigen *x*.

$$B = x_1 \tag{2.60}$$

$$\begin{aligned} Bv_s(x_1) &= x_1\delta(x_1 - x) \\ &= x\delta(x_1 - x) \\ &= xv_s(x_1) \end{aligned} \tag{2.61}$$

Karena sistem ini merupakan sistem dari partikel bebas, maka sistem ini dianggap sebagai sistem yang kontinyu, maka persamaan (2.26) menjadi

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_x(x_2) v_x(x_1)\, dx \tag{2.62}$$

dengan mensubstitusi persamaan (2.59) dan persamaan (2.41) ke persamaan (2.62) maka dapat diperoleh fungsi gelombang dari $\varphi_x(x_2)$.

$$\begin{aligned} \Psi(x_1, x_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_x(x_2) v_x(x_1)\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_x(x_2) \delta(x_1 - x) dx \\ &= \varphi_{x_1}(x_2) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(\frac{2\pi i}{h}\right)(x_1 - x_2 + x_o)p} dp \end{aligned} \tag{2.63}$$

Maka diperoleh

$$\varphi_x(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(\frac{2\pi i}{h}\right)(x - x_2 + x_o)p} dp \tag{2.64}$$

$\varphi_x(x_2)$ dapat dibuat dalam bentuk fungsi Delta-Dirac dengan memisalkan

$$k = \frac{2\pi}{h} p$$

$$p = \frac{hk}{2\pi}$$

$$\frac{dp}{dk} = \frac{h}{2\pi}$$

$$dp = \frac{h}{2\pi} dk \qquad (2.65)$$

Dengan mensubstitusi *k* dan *dp* pada persamaan (2.65) ke persamaan (2.64) maka akan diperoleh $\varphi_x(x_2)$.

$$\varphi_x(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x_2+x_o)} \frac{h}{2\pi} dk$$

$$= h \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x_2+x_o)} dk}_{\delta(x-x_2+x_o)}$$

$$= h\delta(x - x_2 + x_o) \qquad (2.66)$$

$\varphi_x(x_2)$ adalah fungsi eigen dari operator Q.

$$Q = x_2 \qquad (2.67)$$

Sehingga jika operator Q dioperasikan pada $\varphi_x(x_2)$ akan menghasilkan nilai eigen yang berhubungan dengan $x + x_o$

$$\begin{aligned} Q\varphi_x(x_2) &= x_2 h\delta(x - x_2 + x_o) \\ &= x_2 h\delta\left[-(x_2 - x - x_o)\right] \\ &= x_2 h\delta(x_2 - (x + x_o)) \\ &= h(x + x_o)\delta(x_2 - (x + x_o)) \\ &= h(x + x_o)\varphi_x(x_2) \end{aligned} \tag{2.68}$$

dengan $x + x_o$ merupakan koordinat partikel kedua.

Selama operator yang bekerja memenuhi

$$PQ - QP = \frac{h}{2\pi i} \tag{2.69}$$

maka secara umum hal itu menunjukkan bahwa ψ_k dan φ_r mungkin untuk menjadi fungsi eigen dari kedua operator tidak komut tersebut yang berhubungan dengan kuantitas fisisnya.

Kembali pada kasus persamaan (2.24) dan (2.40), diasumsikan bahwa ψ_k dan φ_r memang fungsi eigen dari operator P dan Q yang masing-masing memiliki nilai eigen p_k dan q_r.

$$P\psi_k(x_2) = p_k\psi_k(x_2) \tag{2.70}$$

$$Q\varphi_r(x_2) = q_r\varphi_r(x_2) \tag{2.71}$$

Maka dengan pengukuran baik pengukuran A atau B, sistem kedua dapat diprediksi tepat dan tanpa gangguan, baik untuk nilai kuantitas P (yang mana adalah p_k) ataupun nilai kuantitas Q (yang mana adalah q_r). Berdasarkan kriteria realitas fisis yang dijelaskan di atas, dalam kasus pertama kuantitas P harus dianggap menjadi elemen realitas, sehingga dalam kasus kedua kuantitas Q adalah elemen realitas. Tapi, seperti apa yang sudah dilakukan sebelumnya, bahwa pada perasamaan (2.58) dan (2.68) terlihat bahwa fungsi gelombang ψ_k dan φ_r memiliki realitas yang sama, dengan kata lain keduanya memiliki elemen realitas yang simultan. Dalam hal ini, dapat disimpulkan bahwa mekanika kuantum melanggar lokalitas EPR dikarenakan pengukuran pada sistem pertama dapa mempengaruhi hasil pengukuran pada sistem kedua, padahal kedua sistem itu sudah tidak lagi berinteraksi satu sama lain.

Kembali pada pernyataan sebelumnya bahwa EPR setuju (1) deskripsi mekanika kuantum dari realitas yang diberikan oleh fungsi gelombang tidak lengkap atau (2) ketika operator yang berhubungan dengan dua kuantitas fisis tidak komut maka dua kuantitas tersebut tidak dapat memiliki realitas yang simultan. Lalu, jika diasumsikan bahwa fungsi gelombang tersebut memberikan deskripsi lengkap dari realitas fisis yang terkandung dalam fungsi gelombang, maka akan sampai pada kesimpulan bahwa dua kuantitas fisis yang memiliki operator yang tidak komut, dapat memiliki realitas fisis yang simultan. Hal itu menyebabkan negasi dari pernyataan (1) mengarah pada negasi dari pernyataan (2). Maka EPR memaksakan untuk menyimpulkan bahwa *deskripsi mekanika kuantum dari realitas fisis yang diberikan oleh fungsi gelombang tidak lengkap* (Einstein, Podolsky, Rosen, 1935).

2.2 Teorema Tanpa Penyalinan

Hampir setiap hari penyalinan (*cloning*) data klasik dilakukan oleh manusiam. Hal ini sebenarnya merupakan fungsi umum dalam dunia media digital. Namun, penyalinan ini tidak bisa diselesaikan dalam teori kuantum informasi. Keadaan kuantum sembarang tidak bisa disalin dengan operator uniter.

Anggap terdapat operator transformasi uniter u yang merupakan operator penyalin sistem kuantum. Operator uniter u ini bekerja pada keadaan $|\theta\rangle$ sehingga

$$u|\theta 0\rangle = |\theta\theta\rangle \qquad (2.72)$$

Sekarang anggap dua buah keadaan yang saling independen secara linier $|\eta\rangle$ dan $|\delta\rangle$. Maka apabila operator uniter u bekerja pada keduanya, secara definisi kita akan mendapatkan

$$u|\eta 0\rangle = |\eta\eta\rangle \qquad (2.73)$$

$$u|\delta 0\rangle = |\delta\delta\rangle \qquad (2.74)$$

Anggap terdapat keadaan $|\upsilon\rangle$ lalu bekerja operator u, maka

$$|\upsilon\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\eta\rangle + |\delta\rangle\right) \qquad (2.75)$$

$$u|\upsilon 0\rangle = u\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\eta 0\rangle + |\delta 0\rangle\right)\right] \qquad (2.76)$$

Jika bagian ruas kanan pada persamaan (2.76) diselesaikan, akan menghasilkan

$$u\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\eta 0\rangle + |\delta 0\rangle\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(u|\eta 0\rangle + u|\delta 0\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\eta\eta\rangle + |\delta\delta\rangle\right) \tag{2.77}$$

Namun jika bagian ruas kiri pada persamaan (2.76) diselesaikan, akan menghasilkan

$$\begin{aligned} u|\upsilon 0\rangle &= |\upsilon\upsilon\rangle = |\upsilon\rangle \otimes |\upsilon\rangle \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\eta\rangle + |\delta\rangle\right)\right] \otimes \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\eta\rangle + |\delta\rangle\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(|\eta\eta\rangle + |\eta\delta\rangle + |\delta\eta\rangle + |\delta\delta\rangle\right) \end{aligned} \tag{2.78}$$

Berdasarkan hasil pada persamaan (2.77) dan (2.78) dapat dilihat bahwa terdapat ketidakkonsistenan antara ruas kiri dan ruas kanan. Maksudnya, hasil pada persamaan (2.78) kontradiksi dengan hasil pada persamaan (2.77). Oleh karena itu, operator transformasi penyalin uniter tidaklah ada dalam kuantum informasi. Jelasnya, keadaan kuantum tidak dapat disalin dengan pengukuran (Nakahara dan Ohmi, 2008).

2.3 Keadaan Terbelit dan Keadaan Bell

Secara fisis, keadaan terbelit mendeskripsikan dua sistem yang telah dipisah sangat jauh sehingga tidak dapat saling berinteraksi satu sama lain kemudian salah satu dari kedua sistem itu diberi gangguan, maka sistem yang lainnya merasakan gangguan yang diberikan pada sistem pertama. Selain keadaan terbelit, terdapat juga suatu keadaan lain yang dikenal dengan keadaan terpisah. Secara fisis, keadaan terpisah (*separable*) mendeskripsikan dua sistem yang telah dipisah sangat jauh sehingga tidak dapat saling berinteraksi satu sama lain kemudian salah satu dari kedua sistem itu diberi gangguan, maka sistem yang lainnya tidak merasakan gangguan yang diberikan pada sistem pertama. Secara matematis, keadaan terbelit adalah suatu keadaan yang tidak dapat dipisahkan ke dalam bentuk keadaan-keadaan lain dalam perkalian langsung. Sedangkan keadaan yang sebaliknya disebut dengan keadaan terpisah. Secara umum keadaan terbelit qubit-n

$$|\psi\rangle = \alpha_1 \left|\underset{n}{0\cdots0}\right\rangle + \alpha_2 \left|\underset{n}{0\cdots1}\right\rangle + \cdots + \alpha_{2^n} \left|\underset{n}{1\cdots1}\right\rangle \qquad (2.79)$$

dengan tetapan kompleks $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2^n}$ memenuhi syarat normalisasi

$$|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \cdots + |\alpha_{2^n}|^2 = 1 \qquad (2.80)$$

mempunyai $2\left(2^n - 1\right)$ derajat kebebasan. Sedangkan keadaan qubit n-plet yang dapat dipisah ke dalam n qubit tunggal

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \cdots \otimes |\psi_{2^n}\rangle \qquad (2.81)$$

hanya mempunyai 2n derajat kebebasan (Purwanto, 2014).

Misalkan terdapat sebuah keadaan dua qubit.

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}\left(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle\right) \qquad (2.82)$$

Keadaan (2.82) dapat dibentuk menjadi dua keadaan dengan bantuan perkalian langsung.

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right)\right] \otimes \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right)\right] \\ &= |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \qquad (2.83) \end{aligned}$$

Keadaan pada persamaan (2.82) tersebut merupakan keadaan terpisah. Sekarang, dimisalkan keadaan tiga qubit

$$\left|\alpha\right\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\left|000\right\rangle + \left|001\right\rangle + \left|010\right\rangle + \left|011\right\rangle\right.$$
$$\left. + \left|100\right\rangle + \left|101\right\rangle + \left|110\right\rangle + \left|111\right\rangle\right) \tag{2.84}$$

Keadaan (2.84) dapat dibentuk menjadi tiga keadaan dengan bantuan perkalian langsung.

$$\left|\alpha\right\rangle = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle + \left|1\right\rangle\right)\right] \otimes \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle + \left|1\right\rangle\right)\right]$$
$$\otimes \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle + \left|1\right\rangle\right)\right]$$
$$= \left|\alpha_1\right\rangle \otimes \left|\alpha_2\right\rangle \otimes \left|\alpha_3\right\rangle \tag{2.85}$$

Keadaan pada persamaan (2.84) tersebut merupakan keadaan terpisah. Sekarang, dimisalkan keadaan empat qubit

$$\left|\beta\right\rangle = \frac{1}{4}\left(\left|0000\right\rangle + \left|0001\right\rangle + \left|0010\right\rangle + \left|0011\right\rangle\right.$$
$$+ \left|0100\right\rangle + \left|0101\right\rangle + \left|0110\right\rangle + \left|0111\right\rangle$$
$$+ \left|1000\right\rangle + \left|1001\right\rangle + \left|1010\right\rangle + \left|1011\right\rangle$$
$$\left. + \left|1100\right\rangle + \left|1101\right\rangle + \left|1110\right\rangle + \left|1111\right\rangle\right) \tag{2.86}$$

Keadaan (2.86) dapat dibentuk menjadi empat keadaan dengan bantuan perkalian langsung.

$$\left|\beta\right\rangle = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle + \left|1\right\rangle\right)\right] \otimes \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle + \left|1\right\rangle\right)\right]$$
$$\otimes \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle + \left|1\right\rangle\right)\right] \otimes \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle + \left|1\right\rangle\right)\right]$$
$$\left|\beta\right\rangle = \left|\beta_1\right\rangle \otimes \left|\beta_2\right\rangle \otimes \left|\beta_3\right\rangle \otimes \left|\beta_4\right\rangle \tag{2.87}$$

Keadaan pada persamaan (2.86) tersebut merupakan keadaan terpisah.

Dimisalkan suatu keadaan dua qubit yang seperti keadaan pada persamaan (2.82), namun diubah salah satu tandanya dari positif menjadi negatif.

$$|\gamma\rangle = \frac{1}{2}\left(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle\right) \quad (2.88)$$

Keadaan pada persamaan (2.87) tidak dapat dipisah menjadi dua keadaan dengan bantuan perkalian langsung

$$|\gamma\rangle = |\gamma_1\rangle \otimes |\gamma_2\rangle \quad (2.89)$$

Sehingga keadaan (2.88) tersebut adalah keadaan terbelit. Sekarang diambil keadaan tiga qubit lain yang seperti keadaan pada persamaan (2.84), namun diubah juga salah satu tandanya dari positif menjadi negatif.

$$|\kappa\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(|000\rangle + |001\rangle + |010\rangle + |011\rangle\right.$$

$$\left. + |100\rangle - |101\rangle + |110\rangle + |111\rangle\right) \quad (2.90)$$

Keadaan pada persamaan (2.90) tidak dapat dipisah menjadi tiga keadaan dengan bantuan perkalian langsung

$$|\kappa\rangle = |\kappa_1\rangle \otimes |\kappa_2\rangle \otimes |\kappa_3\rangle \quad (2.91)$$

Sehingga keadaan (2.90) tersebut adalah keadaan terbelit. Sekarang diambil keadaan empat qubit lain yang seperti keadaan pada persamaan (2.86), namun diubah juga salah satu tandanya dari positif menjadi negatif.

$$\begin{aligned}|\mu\rangle = \frac{1}{4}\big(&|0000\rangle + |0001\rangle + |0010\rangle + |0011\rangle \\ &+|0100\rangle + |0101\rangle + |0110\rangle + |0111\rangle \\ &+|1000\rangle + |1001\rangle + |1010\rangle - |1011\rangle \\ &+|1100\rangle + |1101\rangle + |1110\rangle + |1111\rangle\big)\end{aligned} \tag{2.92}$$

Keadaan pada persamaan (2.92) tidak dapat dipisah menjadi empat keadaan dengan bantuan perkalian langsung

$$|\mu\rangle = |\mu_1\rangle \otimes |\mu_2\rangle \otimes |\mu_3\rangle \otimes |\mu_4\rangle \tag{2.93}$$

Sehingga keadaan (2.92) tersebut adalah keadaan terbelit. Berdasarkan perumusan-perumusan di atas dapat dilihat bahwa keterbelitan suatu keadaan dapat berubah dengan cara merubah salah satu tanda positif atau negatif dari suatu keadaan.

Contoh lain dari keadaan terbelit adalah keadaan Bell atau disebut juga keadaan pasangan EPR, keadaan GHZ, dan keadaan W. Keadaan EPR tersebut adalah sebagai berikut.

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right) \tag{2.94}$$

$$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle - |11\rangle\right) \tag{2.95}$$

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle + |10\rangle\right) \tag{2.96}$$

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle - |10\rangle\right) \tag{2.97}$$

Dengan mengoperasikan operator $H \otimes H$ pada keadaan Bell, dengan

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.98}$$

serta dengan mensubstitusi

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right) \tag{2.99}$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle - |1\rangle\right) \tag{2.100}$$

maka keadaan Bell dapat dituliskan juga dalam bentuk sebagai berikut.

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle|+\rangle + |-\rangle|-\rangle\right) \tag{2.101}$$

$$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle|+\rangle - |-\rangle|-\rangle\right) \tag{2.102}$$

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle|-\rangle + |-\rangle|+\rangle\right) \tag{2.103}$$

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle|-\rangle - |-\rangle|+\rangle\right) \tag{2.104}$$

Sedangkan, keadaan GHZ dan keadaan W adalah sebagai berikut.

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|000\rangle + |111\rangle\right) \tag{2.105}$$

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle\right) \tag{2.106}$$

(Nakahara dan Ohmi, 2008).

2.4 Teleportasi Kuantum Melalui Keadaan Bell

Charles H. Bennett dan kawan-kawan merupakan orang-orang yang pertama kali melakukan perumusan teleportasi kuantum informasi. Telportasi kuantum informasi yang dilakukan yaitu teleportasi keadaan satu qubit sembarang melalui keadaan pasangan EPR. Teleportasi keadaan satu qubit sembarang (1) dilakukan dari pengirim bernama Alice menuju penerima bernama Bob. Keadaan satu qubit sembarang diberikan dalam persamaan matematis

$$|\phi\rangle_1 = a|0\rangle_1 + b|1\rangle_1 \tag{2.107}$$

dengan $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

Sedangkan keadaan pasangan EPR diberikan dalam persamaan matematis

$$|\Psi^-\rangle_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle - |10\rangle\right)_{23} \tag{2.108}$$

Salah satu dari dua partikel pada keadaan terbelit EPR merupakan partikel pengirim (2) yang diberikan kepada Alice dan partikel lainnya merupakan partikel penerima (3) yang diberikan kepada Bob. Untuk dapat melakukan pengiriman informasi satu qubit sembarang, Alice harus melakukan pengukuran pada partikel (1) dan partikel (2). Akibat dari pengukuran tersebut, keadaan pada partikel (1) akan melebur pada keadaan EPR. Sehingga keadaan seluruh sistemnya yang mengandung keadaan satu qubit sembarang dan keadaan EPR menjadi

$$\begin{aligned}
|\Psi\rangle_{123} &= |\phi\rangle_1 \otimes |\Psi^-\rangle_{23} \\
&= \left[a|0\rangle_1 + b|1\rangle_1\right] \otimes \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle - |10\rangle\right)_{23}\right] \\
&= \frac{a}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_1|0\rangle_2|1\rangle_3 - |0\rangle_1|1\rangle_2|0\rangle_3\right)
\end{aligned}$$

$$+\frac{b}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle_1|0\rangle_2|1\rangle_3-|1\rangle_1|1\rangle_2|0\rangle_3\right) \tag{2.109}$$

Pengukuran yang dilakukan oleh Alice pada partikel (1) dan (2) secara langsung akan berlaku pada seluruh sistem akibat keadaan satu qubit sembarang yang melebur pada keadaan EPR. Pengukuran yang dilakukan Alice adalah $\left(\langle\Psi|\otimes I\right)$ atau $\left(\langle\Phi|\otimes I\right)$ dengan $\langle\Psi|$ atau $\langle\Phi|$ merupakan salah satu dari keadaan pasangan EPR pada persamaan (2.94), (2.95), (2.96), dan (2.97). Contoh pengukuran yang dilakukan oleh Alice adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\left(\langle\Phi^+|\otimes I\right)|\Psi\rangle_{123} &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle 00|+\langle 11|\right)_{12}\otimes I\right) \\
&\quad \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_1|0\rangle_2|1\rangle_3-|0\rangle_1|1\rangle_2|0\rangle_3\right)\right. \\
&\quad \left.+\frac{b}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle_1|0\rangle_2|1\rangle_3-|1\rangle_1|1\rangle_2|0\rangle_3\right)\right) \\
&= \frac{a}{2}\left(\langle 00|+\langle 11|\right)_{12}|0\rangle_1|0\rangle_2\otimes|1\rangle_3 \\
&\quad -\frac{a}{2}\left(\langle 00|+\langle 11|\right)_{12}|0\rangle_1|1\rangle_2\otimes|0\rangle_3 \\
&\quad +\frac{b}{2}\left(\langle 00|+\langle 11|\right)_{12}|1\rangle_1|0\rangle_2\otimes|1\rangle_3 \\
&\quad -\frac{b}{2}\left(\langle 00|+\langle 11|\right)_{12}|1\rangle_1|1\rangle_2\otimes|0\rangle_3 \\
&= \frac{1}{2}\left(a|1\rangle_3-b|0\rangle_3\right)
\end{aligned} \tag{2.110}$$

Kemudian Alice akan mendapatkan hasil pengukuran dari pengukuran yang telah ia lakukan pada persamaan (2.110). Hasil pengukuran itu merupakan keadaan yang diterima oleh Bob. Namun hasil pengukuran Alice atau keadaan yang diterima oleh Bob pada persamaan (2.110) belum sesuai dengan keadaan satu qubit sembarang pada persamaan (2.107) yang dikirim dari Alice. Oleh karena itu, Alice harus menginformasikan Bob melalui komunikasi klasik mengenai pengukuran yang harus dilakukan oleh Bob agar keadaan yang sampai di Bob sama dengan keadaan yang dikirim oleh Alice. Pengukuran yang harus dilakukan Bob dalam hal ini yaitu pengukuran dengan mengoperasikan operator uniter pada keadaan yang sampai pada Bob. Berdasarkan hasil pengukuran yang diperoleh pada persamaan (2.110), Alice harus menginformasikan pada Bob untuk melakukan pengukuran atau operasi operator uniter $2i\sigma_y$ pada keadaan yang sampai pada Bob pada persamaan (2.110). Dengan begitu Bob akan memperoleh informasi atau keadaan yang dikirim melalui Alice seperti pada persamaan (2.107). Lalu, dengan menggunakan pengukuran yang lainnya akan diperoleh hasil pengukuran atau keadaan yang sampai pada Bob sebagai berikut.

$$\left(\left\langle\Phi^-\right|\otimes I\right)\left|\Psi\right\rangle_{123}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left\langle 00\right|-\left\langle 11\right|\right)_{12}\otimes I\right)$$

$$\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle_1\left|0\right\rangle_2\left|1\right\rangle_3-\left|0\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2\left|0\right\rangle_3\right)\right.$$

$$\left.+\frac{b}{\sqrt{2}}\left(\left|1\right\rangle_1\left|0\right\rangle_2\left|1\right\rangle_3-\left|1\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2\left|0\right\rangle_3\right)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{a}{2}\left(\langle 00| - \langle 11|\right)_{12} |0\rangle_1 |0\rangle_2 \otimes |1\rangle_3 \\
&- \frac{a}{2}\left(\langle 00| - \langle 11|\right)_{12} |0\rangle_1 |1\rangle_2 \otimes |0\rangle_3 \\
&+ \frac{b}{2}\left(\langle 00| - \langle 11|\right)_{12} |1\rangle_1 |0\rangle_2 \otimes |1\rangle_3 \\
&- \frac{b}{2}\left(\langle 00| - \langle 11|\right)_{12} |1\rangle_1 |1\rangle_2 \otimes |0\rangle_3 \\
&= \frac{1}{2}\left(a|1\rangle_3 + b|0\rangle_3\right) \qquad (2.111)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\langle \Psi^+ | \otimes I\right)|\Psi\rangle_{123} &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle 01| + \langle 10|\right)_{12} \otimes I\right) \\
&\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_1 |0\rangle_2 |1\rangle_3 - |0\rangle_1 |1\rangle_2 |0\rangle_3\right)\right. \\
&\left. + \frac{b}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle_1 |0\rangle_2 |1\rangle_3 - |1\rangle_1 |1\rangle_2 |0\rangle_3\right)\right) \\
&= \frac{a}{2}\left(\langle 01| + \langle 10|\right)_{12} |0\rangle_1 |0\rangle_2 \otimes |1\rangle_3 \\
&- \frac{a}{2}\left(\langle 01| + \langle 10|\right)_{12} |0\rangle_1 |1\rangle_2 \otimes |0\rangle_3 \\
&+ \frac{b}{2}\left(\langle 01| + \langle 10|\right)_{12} |1\rangle_1 |0\rangle_2 \otimes |1\rangle_3 \\
&- \frac{b}{2}\left(\langle 01| + \langle 10|\right)_{12} |1\rangle_1 |1\rangle_2 \otimes |0\rangle_3 \\
&= -\frac{1}{2}\left(a|0\rangle_3 - b|1\rangle_3\right) \qquad (2.112)
\end{aligned}
$$

$$\left(\left\langle\Psi^{-}\right|\otimes I\right)\left|\Psi\right\rangle_{123}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left\langle 01\right|-\left\langle 10\right|\right)_{12}\otimes I\right)$$

$$\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle_1\left|0\right\rangle_2\left|1\right\rangle_3-\left|0\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2\left|0\right\rangle_3\right)\right.$$

$$\left.+\frac{b}{\sqrt{2}}\left(\left|1\right\rangle_1\left|0\right\rangle_2\left|1\right\rangle_3-\left|1\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2\left|0\right\rangle_3\right)\right)$$

$$=\frac{a}{2}\left(\left\langle 01\right|-\left\langle 10\right|\right)_{12}\left|0\right\rangle_1\left|0\right\rangle_2\otimes\left|1\right\rangle_3$$

$$-\frac{a}{2}\left(\left\langle 01\right|-\left\langle 10\right|\right)_{12}\left|0\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2\otimes\left|0\right\rangle_3$$

$$+\frac{b}{2}\left(\left\langle 01\right|-\left\langle 10\right|\right)_{12}\left|1\right\rangle_1\left|0\right\rangle_2\otimes\left|1\right\rangle_3$$

$$-\frac{b}{2}\left(\left\langle 01\right|-\left\langle 10\right|\right)_{12}\left|1\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2\otimes\left|0\right\rangle_3$$

$$=-\frac{1}{2}\left(a\left|0\right\rangle_3+b\left|1\right\rangle_3\right) \tag{2.113}$$

Sehingga agar hasil pengukuran Alice atau keadaan yang diterima oleh Bob pada persamaan (2.110), (2.111), (2.112), dan (2.113) sama dengan keadaaan yang dikirim oleh Alice pada persamaan (2.107), Alice harus menginformasikan Bob mengenai pengukuran atau operator uniter yang harus digunakan oleh Bob yang dituliskan pada Tabel 2.1 sebagai berikut.

Tabel 2.1 Operator Uniter Bob Sesuai dengan Pengukuran pada Alice

Pengukuran	Operator Uniter Bob
$\left\|\Phi^{+}\right\rangle$	$2i\sigma_{y}$
$\left\|\Phi^{-}\right\rangle$	$2\sigma_{X}$
$\left\|\Psi^{+}\right\rangle$	$-2\sigma_{Z}$
$\left\|\Psi^{-}\right\rangle$	$-2I$

(Bennett, dkk, 1993)

BAB III
KEADAAN GUGUS

3.1 Definisi Keadaan Gugus

Suatu keadaan dikatakan sebagai keadaan gugus jika memenuhi dua definisi keadaan gugus, yaitu terbelit maksimal (*maximally entangled*) dan ketahanan tinggi (*high persistency*) (Briegel dan Raussendorf, 2001). Selain dua definisi tersebut, keadaan gugus juga merupakan keadaan yang apabila terdapat sekumpulan operator uniter dikerjakan pada suatu keadaan lalu menghasilkan keadaan itu sendiri (Tang, dkk, 2008). Definisi-definisi ini dipenuhi oleh persamaan (3.1) di bawah ini

$$\left|\phi_N\right\rangle = \frac{1}{2^{N/2}} \bigotimes_{a=1}^{N} \left(\left|0\right\rangle_a \sigma_z^{(a+1)} + \left|1\right\rangle_a \right) \qquad (3.1)$$

dimana $\sigma_z^{(\mathrm{N}+1)} = 1$

3.1.1 Terbelit Maksimal

Suatu keadaan memenuhi sifat terbelit maksimal adalah ketika dalam keadaan tersebut pada setiap sukunya memiliki koefisien yang sama dengan suku yang lainnya dan tiap dua qubit $j \neq k$ dan $j < k$ keadaan tersebut dapat proyeksikan ke dalam bentuk keadaan Bell dengan pengukuran lokal (transformasi uniter lokal). Keadaan Bell adalah keadaan yang terbelit maksimal dikarenakan memiliki koefisien maksimal untuk keadaan dua qubit yaitu $\frac{1}{\sqrt{2}}$ pada masing-masing sukunya dan keadaan Bell tidak dapat dipisahkan menjadi keadaan lain. Misalkan untuk keadaan gugus dengan N = 2, 3, dan 4 qubit serta keadaan pada persamaan (2.88), (2.90), (2.92), keadaan GHZ pada persamaan (2.105), dan keadaan W pada persamaan (2.106), sebagai berikut.

Untuk keadaan gugus N = 2 qubit

$$\left|\phi_2\right\rangle = \frac{1}{2^{2/2}} \bigotimes_{a=1}^{2} \left(\left|0\right\rangle_a \sigma_z^{(a+1)} + \left|1\right\rangle_a \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\left|0\right\rangle_1 \otimes \sigma_z^{(2)} + \left|1\right\rangle_1 \otimes I \right) \left(\left|0\right\rangle_2 \otimes \sigma_z^{(3)} + \left|1\right\rangle_2 \right)$$

$$\textit{dengan } \sigma_z^{(3)} = 1$$

$$= \frac{1}{2} \left(\left|0\right\rangle_1 \otimes \sigma_z^{(2)} + \left|1\right\rangle_1 \otimes I \right) \left(\left|0\right\rangle_2 + \left|1\right\rangle_2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\left|0\right\rangle_1 \otimes \sigma_z^{(2)} \left(\left|0\right\rangle_2 + \left|1\right\rangle_2 \right) + \left|1\right\rangle_1 \left(\left|0\right\rangle_2 + \left|1\right\rangle_2 \right) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\left|0\right\rangle_1 \left|0\right\rangle_2 - \left|0\right\rangle_1 \left|1\right\rangle_2 + \left|1\right\rangle_1 \left|0\right\rangle_2 + \left|1\right\rangle_1 \left|1\right\rangle_2 \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left|0\right\rangle_1 \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left|0\right\rangle_2 - \left|1\right\rangle_2 \right) + \left|1\right\rangle_1 \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left|0\right\rangle_2 + \left|1\right\rangle_2 \right) \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left|0\right\rangle_1 \left|-\right\rangle_2 + \left|1\right\rangle_1 \left|+\right\rangle_2 \right) \tag{3.2}$$

Dari dua qubit yang ada, dengan bantuan transformasi uniter lokal $I \otimes H$,

$$\left(I \otimes H \right) \left|\phi_2\right\rangle = \left(I \otimes H \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left|0\right\rangle_1 \left|-\right\rangle_2 + \left|1\right\rangle_1 \left|+\right\rangle_2 \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left|0\right\rangle_1 \left|1\right\rangle_2 + \left|1\right\rangle_1 \left|0\right\rangle_2 \right) \tag{3.3}$$

dapat dilihat bahwa persamaan (3.2) dapat diproyeksikan ke dalam keadaan Bell pada persamaan (2.96). Kemudian, untuk representasi matriks untuk keadaan gugus N = 2 qubit adalah sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
|\phi_2\rangle &= \frac{1}{2}\left(|0\rangle_1 \otimes \sigma_z{}^{(2)} + |1\rangle_1 \otimes I\right)\left(|0\rangle_2 + |1\rangle_2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} \sigma_z{}^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (3.3)
\end{aligned}
$$

Untuk keadaan gugus N = 3 qubit

$$\left|\phi_3\right\rangle = \frac{1}{2^{3/2}} \bigotimes_{a=1}^{3} \left(\left|0\right\rangle_a \sigma_z^{(a+1)} + \left|1\right\rangle_a \right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\left|0\right\rangle_1 \otimes \sigma_z^{(2)} \otimes I + \left|1\right\rangle_1 \otimes I \otimes I \right)$$

$$\left(\left|0\right\rangle_2 \otimes \sigma_z^{(3)} + \left|1\right\rangle_2 \otimes I \right) \left(\left|0\right\rangle_3 + \left|1\right\rangle_3 \right)$$

$$dengan \qquad \sigma_z^{(4)} = 1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left|0\right\rangle_1 \otimes \sigma_z^{(2)} \otimes I + \left|1\right\rangle_1 \otimes I \otimes I \right)$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left|0\right\rangle_2 \left|-\right\rangle_3 + \left|1\right\rangle_2 \left|+\right\rangle_3 \right) \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(\left|0\right\rangle_1 \otimes \sigma_z^{(2)} \otimes I \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left|0\right\rangle_2 \left|-\right\rangle_3 + \left|1\right\rangle_2 \left|+\right\rangle_3 \right) \right) \right.$$

$$\left. + \left(\left|1\right\rangle_1 \otimes I \otimes I \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left|0\right\rangle_2 \left|-\right\rangle_3 + \left|1\right\rangle_2 \left|+\right\rangle_3 \right) \right) \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left|0\right\rangle_1 \left|0\right\rangle_2 \left|-\right\rangle_3 - \left|0\right\rangle_1 \left|1\right\rangle_2 \left|+\right\rangle_3 \right. \right.$$

$$\left. \left. + \left|1\right\rangle_1 \left|0\right\rangle_2 \left|-\right\rangle_3 + \left|1\right\rangle_1 \left|1\right\rangle_2 \left|+\right\rangle_3 \right) \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left|0\right\rangle_1 + \left|1\right\rangle_1 \right) \left|0\right\rangle_2 \left|-\right\rangle_3 - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left|0\right\rangle_1 - \left|1\right\rangle_1 \right) \left|1\right\rangle_2 \left|+\right\rangle_3 \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left|0\right\rangle_1 + \left|1\right\rangle_1 \right) \left|0\right\rangle_2 \left|-\right\rangle_3 \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left|0\right\rangle_1 - \left|1\right\rangle_1 \right) \left|1\right\rangle_2 \left|+\right\rangle_3 \right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+\rangle_1|0\rangle_2|-\rangle_3-|-\rangle_1|1\rangle_2|+\rangle_3\right] \qquad (3.4)$$

Dari persamaan (3.4), apabila kita ambil keadaan pada qubit ke 1 dan 2 beserta dengan koefisien $\frac{1}{\sqrt{2}}$, kemudian kita lakukan transformasi uniter lokal $H\otimes I$,

$$(H\otimes I)\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+\rangle_1|0\rangle_2-|-\rangle_1|1\rangle_2\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|0\rangle_1|0\rangle_2-|1\rangle_1|1\rangle_2\right] \qquad (3.5)$$

dapat dilihat bahwa pengambilan keadaan pada qubit ke 1 dan 2 dari persamaan (3.4) dapat diproyeksikan ke dalam keadaan Bell pada persamaan (2.95). Lalu, representasi matriks untuk keadaan gugus N = 3 qubit adalah sebagai berikut.

$$|\phi_3\rangle=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(|0\rangle_1\otimes\sigma_z^{(2)}\otimes I+|1\rangle_1\otimes I\otimes I\right)\right]$$

$$\left[\left(|0\rangle_2\otimes\sigma_z^{(3)}+|1\rangle_2\otimes I\right)\left(|0\rangle_3+|1\rangle_3\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

Untuk keadaan gugus N = 4 qubit

$$\left|\phi_4\right\rangle = \frac{1}{2^{4/2}} \bigotimes_{a=1}^{4} \left(\left|0\right\rangle_a \sigma_z^{(a+1)} + \left|1\right\rangle_a\right)$$

$$= \frac{1}{2^2}\left(\left|0\right\rangle_1 \otimes \sigma_z^{(2)} \otimes I \otimes I + \left|1\right\rangle_1 \otimes I \otimes I \otimes I\right)$$

$$\left(\left|0\right\rangle_2 \otimes \sigma_z^{(3)} \otimes I + \left|1\right\rangle_2 \otimes I \otimes I\right)\left(\left|0\right\rangle_3 \otimes \sigma_z^{(4)} + \left|1\right\rangle_3 \otimes I\right)$$

$$\left(\left|0\right\rangle_3 + \left|1\right\rangle_3\right)$$

$$\textit{dengan} \qquad \sigma_z^{(5)} = 1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle_1 \otimes \sigma_z^{(2)} \otimes I \otimes I + \left|1\right\rangle_1 \otimes I \otimes I \otimes I\right)$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left|+\right\rangle_2 \left|0\right\rangle_3 \left|-\right\rangle_4 - \left|-\right\rangle_2 \left|1\right\rangle_3 \left|+\right\rangle_4\right]\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\Big(\Big(|0\rangle_1 \otimes \sigma_z^{(2)} \otimes I \otimes I\Big)$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big[|+\rangle_2|0\rangle_3|-\rangle_4 - |-\rangle_2|1\rangle_3|+\rangle_4\Big]\right)\Big)$$

$$+\Big(\Big(|1\rangle_1 \otimes I \otimes I \otimes I\Big)$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big[|+\rangle_2|0\rangle_3|-\rangle_4 - |-\rangle_2|1\rangle_3|+\rangle_4\Big]\right)\Big)\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[|0\rangle_1|-\rangle_2|0\rangle_3|-\rangle_4 - |0\rangle_1|+\rangle_2|1\rangle_3|+\rangle_4$$

$$+|1\rangle_1|+\rangle_2|0\rangle_3|-\rangle_4 - |1\rangle_1|-\rangle_2|1\rangle_3|+\rangle_4\Big] \qquad (3.7)$$

Dari persamaan (3.7), apabila kita ambil keadaan pada qubit ke 2 dan 3 beserta dengan koefisien $\frac{1}{\sqrt{2}}$, kemudian kita lakukan transformasi uniter lokal $H \otimes \sigma_X$,

$$(H \otimes \sigma_X)\frac{1}{\sqrt{2}}\Big[|-\rangle_2|0\rangle_3 - |+\rangle_2|1\rangle_3 + |+\rangle_2|0\rangle_3 - |-\rangle_2|1\rangle_3\Big]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[|1\rangle_2|1\rangle_3 - |0\rangle_2|0\rangle_3 + |0\rangle_2|1\rangle_3 - |1\rangle_2|0\rangle_3\Big]$$

$$= \left\{-\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle_2|0\rangle_3 - |1\rangle_2|1\rangle_3\Big)\right]\right.$$

$$\left. + \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle_2|1\rangle_3 - |1\rangle_2|0\rangle_3\Big)\right]\right\} \qquad (3.7)$$

dapat dilihat bahwa pengambilan keadaan pada qubit ke 2 dan 3 dari persamaan (3.7) dapat diproyeksikan ke dalam keadaan Bell pada persamaan (2.95) dan (2.97). Lalu, representasi matriks untuk keadaan gugus N = 4 qubit adalah sebagai berikut.

$$\left|\phi_4\right\rangle = \frac{1}{2^2}\left[\left(\left|0\right\rangle_1 \otimes \sigma_z^{(2)} \otimes I \otimes I + \left|1\right\rangle_1 \otimes I \otimes I \otimes I\right)\right]$$

$$\left[\left(\left|0\right\rangle_2 \otimes \sigma_z^{(3)} \otimes I + \left|1\right\rangle_2 \otimes I \otimes I\right)\left(\left|0\right\rangle_3 \otimes \sigma_z^{(4)} + \left|1\right\rangle_3 \otimes I\right)\right.$$

$$\left.\left(\left|0\right\rangle_3 + \left|1\right\rangle_3\right)\right]$$

$$\left|\phi_4\right\rangle = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left|\phi_4\right\rangle = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

Selain keadaan-keadaan gugus tersebut, dimisalkan keadaan-keadaan terbelit lainnya seperti pada persamaan (2.88), (2.90), (2.92), (2.105), dan (2.106).

Untuk persamaan (2.88)

$$\begin{aligned}\left|\gamma\right\rangle &= \frac{1}{2}\left(\left|0\right\rangle_1\left|0\right\rangle_2+\left|0\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2+\left|1\right\rangle_1\left|0\right\rangle_2-\left|1\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left|0\right\rangle_1\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle_2+\left|1\right\rangle_2\right)+\left|1\right\rangle_1\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle_2-\left|1\right\rangle_2\right)\right]\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_1|+\rangle_2 + |1\rangle_1|-\rangle_2\right) \tag{3.9}$$

Dari persamaan (3.9), apabila kita lakukan transformasi uniter lokal $I \otimes H$,

$$(I \otimes H)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_1|+\rangle_2 + |1\rangle_1|-\rangle_2\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_1|0\rangle_2 + |1\rangle_1|1\rangle_2\right) \tag{3.10}$$

dapat dilihat bahwa persamaan (3.9) dapat diproyeksikan ke dalam keadaan Bell pada persamaan (2.94). Maka, keadaan ini bisa disebut juga keadaan terbelit maksimal.

Untuk persamaan (2.90)

$$\begin{aligned}
|\kappa\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}\big(&|0\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3 + |0\rangle_1|0\rangle_2|1\rangle_3 + |0\rangle_1|1\rangle_2|0\rangle_3 \\
&+|0\rangle_1|1\rangle_2|1\rangle_3 + |1\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3 - |1\rangle_1|0\rangle_2|1\rangle_3 \\
&+|1\rangle_1|1\rangle_2|0\rangle_3 + |1\rangle_1|1\rangle_2|1\rangle_3\big) \\
= \frac{1}{2}\Big[&|0\rangle_1|0\rangle_2\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_3 + |1\rangle_3\right) + |0\rangle_1|1\rangle_2\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_3 + |1\rangle_3\right) \\
&+|1\rangle_1|0\rangle_2\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_3 - |1\rangle_3\right) + |1\rangle_1|1\rangle_2\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_3 + |1\rangle_3\right)\Big] \\
= \frac{1}{2}\Big[&|0\rangle_1|0\rangle_2|+\rangle_3 + |0\rangle_1|1\rangle_2|+\rangle_3 \\
&+|1\rangle_1|0\rangle_2|-\rangle_3 + |1\rangle_1|1\rangle_2|+\rangle_3\Big]
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Dari persamaan (3.11), apabila kita ambil keadaan pada qubit ke 2 dan 3 beserta dengan koefisien $\frac{1}{\sqrt{2}}$, kemudian kita lakukan transformasi uniter lokal $I \otimes H$,

$$\left(I \otimes H\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|0\rangle_2|+\rangle_3+|1\rangle_2|+\rangle_3+|0\rangle_2|-\rangle_3+|1\rangle_2|+\rangle_3\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|0\rangle_2|0\rangle_3+|1\rangle_2|0\rangle_3+|0\rangle_2|1\rangle_3+|1\rangle_2|0\rangle_3\right]$$

$$=\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_2|0\rangle_3+|1\rangle_2|0\rangle_3\right)}_{Bukan\ Keadaan\ Bell}+\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_2|1\rangle_3+|1\rangle_2|0\rangle_3\right)}_{Keadaan\ Bell} \qquad (3.12)$$

dapat dilihat bahwa pengambilan keadaan pada qubit ke 2 dan 3 dari persamaan (3.11) tidak semuanya dapat diproyeksikan ke dalam keadaan Bell. Sehingga, keadaan ini bukan keadaan terbelit maksimal.

Untuk persamaan (2.92)

$$\begin{aligned}|\mu\rangle=\frac{1}{4}\big(&|0000\rangle+|0001\rangle+|0010\rangle+|0011\rangle+|0100\rangle\\&+|0101\rangle+|0110\rangle+|0111\rangle+|1000\rangle+|1001\rangle\\&+|1010\rangle-|1011\rangle+|1100\rangle+|1101\rangle+|1110\rangle+|1111\rangle\big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\Bigg[&\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle+|1\rangle\right)|000\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle+|1\rangle\right)|001\rangle\\&+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle+|1\rangle\right)|010\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle-|1\rangle\right)|011\rangle\\&+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle+|1\rangle\right)|100\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle+|1\rangle\right)|101\rangle\\&+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle+|1\rangle\right)|110\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle+|1\rangle\right)|111\rangle\Bigg]\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big[|+\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3|0\rangle_4 + |+\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3|1\rangle_4$$
$$+|+\rangle_1|0\rangle_2|1\rangle_3|0\rangle_4 + |-\rangle_1|0\rangle_2|1\rangle_3|1\rangle_4$$
$$+|+\rangle_1|1\rangle_2|0\rangle_3|0\rangle_4 + |+\rangle_1|1\rangle_2|0\rangle_3|1\rangle_4$$
$$+|+\rangle_1|1\rangle_2|1\rangle_3|0\rangle_4 + |+\rangle_1|1\rangle_2|1\rangle_3|1\rangle_4\Big] \qquad (3.13)$$

Dari persamaan (3.13), apabila kita ambil keadaan pada qubit ke 1 dan 1 beserta dengan koefisien $\frac{1}{\sqrt{2}}$, kemudian kita lakukan transformasi uniter lokal $H \otimes \sigma_X$,

$$(H \otimes \sigma_X)\frac{1}{\sqrt{2}}\Big[|+\rangle_1|0\rangle_2 + |+\rangle_1|0\rangle_2 + |+\rangle_1|0\rangle_2$$
$$+|-\rangle_1|0\rangle_2 + |+\rangle_1|1\rangle_2 + |+\rangle_1|1\rangle_2$$
$$+|+\rangle_1|1\rangle_2 + |+\rangle_1|1\rangle_2\Big]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[|0\rangle_1|1\rangle_2 + |0\rangle_1|1\rangle_2 + |0\rangle_1|1\rangle_2 + |1\rangle_1|1\rangle_2$$
$$+|0\rangle_1|0\rangle_2 + |0\rangle_1|0\rangle_2 + |0\rangle_1|0\rangle_2 + |0\rangle_1|0\rangle_2\Big]$$

$$= \Bigg[\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle_1|1\rangle_2 + |0\rangle_1|0\rangle_2\big)}_{Bukan\ Keadaan\ Bell} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle_1|1\rangle_2 + |0\rangle_1|0\rangle_2\big)}_{Bukan\ Keadaan\ Bell}$$
$$+\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle_1|1\rangle_2 + |0\rangle_1|0\rangle_2\big)}_{Bukan\ Keadaan\ Bell} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|1\rangle_1|1\rangle_2 + |0\rangle_1|0\rangle_2\big)}_{Keadaan\ Bell}\Bigg] \qquad (3.14)$$

dapat dilihat bahwa pengambilan keadaan pada qubit ke 1 dan 2 dari persamaan (3.13) tidak semuanya dapat diproyeksikan ke dalam keadaan Bell. Sehingga, keadaan ini bukan keadaan terbelit maksimal.

Untuk persamaan (2.105)

$$\left|GHZ\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle_1 \left|0\right\rangle_2 \left|0\right\rangle_3 + \left|1\right\rangle_1 \left|1\right\rangle_2 \left|1\right\rangle_3\right) \quad (3.15)$$

Dari persamaan (3.15), apabila kita ambil keadaan pada qubit ke 2 dan 3 beserta dengan koefisien $\frac{1}{\sqrt{2}}$, kemudian kita lakukan transformasi uniter lokal $I \otimes \sigma_X$,

$$\left(I \otimes \sigma_Z\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle_2 \left|0\right\rangle_3 + \left|1\right\rangle_2 \left|1\right\rangle_3\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle_2 \left|0\right\rangle_3 - \left|1\right\rangle_2 \left|1\right\rangle_3\right) \quad (3.16)$$

dapat dilihat bahwa pengambilan keadaan pada qubit ke 2 dan 3 dari persamaan (3.15) dapat diproyeksikan ke dalam keadaan Bell. Sehingga, keadaan GHZ merupakan keadaan terbelit maksimal.

Untuk persamaan (2.106)

$$\left|W\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\left|001\right\rangle + \left|010\right\rangle + \left|100\right\rangle\right) \quad (3.17)$$

Dapat dilihat bahwa keadaan W memiliki koefisien $\frac{1}{\sqrt{3}}$ yang merupakan bukan koefisien maksimal untuk keadaan tiga qubit dan keadaan W sudah jelas tidak dapat diproyeksikan ke dalam keadaan Bell. Sehingga, keadaan W bukan keadaan terbelit maksimal.

Berdasarkan perumusan-perumusan di atas dapat dilihat bahwa keadaan gugus untuk N = 2, 3, dan 4 qubit, keadaan pada persamaan (2.88), dan keadaan GHZ adalah keadaan terbelit maksimal. Sedangkan, keadaan pada persamaan (2.90), (2.92), dan keadaan W bukan keadaan terbelit maksimal.

3.1.2 Ketahanan Tinggi

Suatu keadaan dikatakan memiliki ketahanan tinggi yaitu jika keadaan tersebut sangat sulit dibuat menjadi keadaan terpisah dari keadaan yang terbelit dengan menggunakan operator uniter. Minimal banyaknya operator uniter yang dikerjakan pada keadaan gugus adalah sebagai berikut (Briegel dan Raussendorf, 2001).

$$P_{e_{|\phi_N\rangle}} = \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil \tag{3.17}$$

Diberikan contoh untuk keadaan gugus dengan N = 2, 3, dan 4 qubit.

Untuk keadaan gugus N = 2 qubit dioperasikan dengan $\left(I \otimes \sigma_z\right)$ dan $\left(I \otimes \sigma_x\right)$ dari kiri.

$$\begin{aligned}\left(I \otimes \sigma_z\right)|\phi_2\rangle &= \left(I \otimes \sigma_z\right)\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_1|-\rangle_2 + |1\rangle_1|+\rangle_2\right)\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|0\rangle_1|+\rangle_2 + |1\rangle_1|-\rangle_2\right]\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}\left(I \otimes \sigma_x\right)|\phi_2\rangle &= \left(I \otimes \sigma_x\right)\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_1|-\rangle_2 + |1\rangle_1|+\rangle_2\right)\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-|0\rangle_1|-\rangle_2 + |1\rangle_1|+\rangle_2\right)\end{aligned} \tag{3.19}$$

Untuk keadaan gugus N = 3 qubit dioperasikan dengan $\left(I \otimes I \otimes \sigma_z\right)$ dan $\left(I \otimes I \otimes \sigma_x\right)$ dari kiri.

$$\left(I\otimes I\otimes\sigma_z\right)\left|\phi_3\right\rangle=\left(I\otimes I\otimes\sigma_z\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left|+\right\rangle_1\left|0\right\rangle_2\left|-\right\rangle_3\right.\right.$$
$$\left.\left.-\left|-\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2\left|+\right\rangle_3\right]\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left|+\right\rangle_1\left|0\right\rangle_2\left|+\right\rangle_3-\left|-\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2\left|-\right\rangle_3\right] \quad (3.20)$$

$$\left(I\otimes I\otimes\sigma_x\right)\left|\phi_3\right\rangle=\left(I\otimes I\otimes\sigma_x\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left|+\right\rangle_1\left|0\right\rangle_2\left|-\right\rangle_3\right.\right.$$
$$\left.\left.-\left|-\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2\left|+\right\rangle_3\right]\right)$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left|+\right\rangle_1\left|0\right\rangle_2\left|-\right\rangle_3+\left|-\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2\left|+\right\rangle_3\right] \quad (3.21)$$

Untuk keadaan gugus N = 4 qubit dioperasikan dengan $\left(I\otimes I\otimes\sigma_x\otimes\sigma_z\right)$ dan $\left(I\otimes I\otimes\sigma_z\otimes\sigma_x\right)$ dari kiri.

$$\left(I\otimes I\otimes\sigma_x\otimes\sigma_z\right)\left|\phi_4\right\rangle=\left(I\otimes I\otimes\sigma_x\otimes\sigma_z\right)$$
$$\left(\frac{1}{2}\left[\left|0\right\rangle_1\left|-\right\rangle_2\left|0\right\rangle_3\left|-\right\rangle_4\right.\right.$$
$$-\left|0\right\rangle_1\left|+\right\rangle_2\left|1\right\rangle_3\left|+\right\rangle_4$$
$$+\left|1\right\rangle_1\left|+\right\rangle_2\left|0\right\rangle_3\left|-\right\rangle_4$$
$$\left.\left.-\left|1\right\rangle_1\left|-\right\rangle_2\left|1\right\rangle_3\left|+\right\rangle_4\right]\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left|0\right\rangle_1\left|-\right\rangle_2\left|1\right\rangle_3\left|+\right\rangle_4\right.$$
$$-\left|0\right\rangle_1\left|+\right\rangle_2\left|0\right\rangle_3\left|-\right\rangle_4$$
$$+\left|1\right\rangle_1\left|+\right\rangle_2\left|1\right\rangle_3\left|+\right\rangle_4$$
$$\left.-\left|1\right\rangle_1\left|-\right\rangle_2\left|0\right\rangle_3\left|-\right\rangle_4\right] \quad (3.22)$$

$$
\begin{aligned}
\left(I\otimes I\otimes\sigma_z\otimes\sigma_x\right)\left|\phi_4\right\rangle &= \left(I\otimes I\otimes\sigma_z\otimes\sigma_x\right) \\
&\left(\frac{1}{2}\Big[\left|0\right\rangle_1\left|-\right\rangle_2\left|0\right\rangle_3\left|-\right\rangle_4\right. \\
&-\left|0\right\rangle_1\left|+\right\rangle_2\left|1\right\rangle_3\left|+\right\rangle_4 \\
&+\left|1\right\rangle_1\left|+\right\rangle_2\left|0\right\rangle_3\left|-\right\rangle_4 \\
&\left.-\left|1\right\rangle_1\left|-\right\rangle_2\left|1\right\rangle_3\left|+\right\rangle_4\Big]\right) \\
&=\frac{1}{2}\Big[-\left|0\right\rangle_1\left|-\right\rangle_2\left|0\right\rangle_3\left|-\right\rangle_4 \\
&+\left|0\right\rangle_1\left|+\right\rangle_2\left|1\right\rangle_3\left|+\right\rangle_4 \\
&-\left|1\right\rangle_1\left|+\right\rangle_2\left|0\right\rangle_3\left|-\right\rangle_4 \\
&+\left|1\right\rangle_1\left|-\right\rangle_2\left|1\right\rangle_3\left|+\right\rangle_4\Big] \qquad (3.23)
\end{aligned}
$$

Selain keadaan-keadaan gugus tersebut, dimisalkan keadaan-keadaan terbelit lainnya seperti pada persamaan (2.88), (2.90), (2.92), (2.105), dan (2.106).

Untuk persamaan (2.88) dioperasikan dengan $\left(I\otimes\sigma_z\right)$ dan $\left(I\otimes\sigma_x\right)$ dari kiri.

$$
\begin{aligned}
\left(I\otimes\sigma_z\right)\left|\gamma\right\rangle &= \left(I\otimes\sigma_z\right)\frac{1}{2}\Big(\left|0\right\rangle_1\left|0\right\rangle_2+\left|0\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2 \\
&+\left|1\right\rangle_1\left|0\right\rangle_2-\left|1\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2\Big) \\
&=\frac{1}{2}\Big(\left|0\right\rangle_1\left|0\right\rangle_2-\left|0\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2+\left|1\right\rangle_1\left|0\right\rangle_2+\left|1\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2\Big) \qquad (3.24)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(I\otimes\sigma_x\right)\left|\gamma\right\rangle &= \left(I\otimes\sigma_x\right)\frac{1}{2}\Big(\left|0\right\rangle_1\left|0\right\rangle_2+\left|0\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2 \\
&+\left|1\right\rangle_1\left|0\right\rangle_2-\left|1\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2\Big)
\end{aligned}
$$

$$=\frac{1}{2}\left(|0\rangle_1|1\rangle_2+|0\rangle_1|0\rangle_2+|1\rangle_1|1\rangle_2-|1\rangle_1|0\rangle_2\right) \quad (3.25)$$

Untuk persamaan (2.90) dioperasikan dengan $\left(I\otimes I\otimes\sigma_z\right)$ dan $\left(I\otimes I\otimes\sigma_x\right)$ dari kiri.

$$\begin{aligned}\left(I\otimes I\otimes\sigma_z\right)|\kappa\rangle &= \left(I\otimes I\otimes\sigma_z\right)\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(|0\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3\right.\\ &+|0\rangle_1|0\rangle_2|1\rangle_3+|0\rangle_1|1\rangle_2|0\rangle_3\\ &+|0\rangle_1|1\rangle_2|1\rangle_3+|1\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3\\ &-|1\rangle_1|0\rangle_2|1\rangle_3+|1\rangle_1|1\rangle_2|0\rangle_3\\ &\left.+|1\rangle_1|1\rangle_2|1\rangle_3\right)\\ &=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(|0\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3-|0\rangle_1|0\rangle_2|1\rangle_3\right.\\ &+|0\rangle_1|1\rangle_2|0\rangle_3-|0\rangle_1|1\rangle_2|1\rangle_3\\ &+|1\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3+|1\rangle_1|0\rangle_2|1\rangle_3\\ &\left.+|1\rangle_1|1\rangle_2|0\rangle_3-|1\rangle_1|1\rangle_2|1\rangle_3\right)\end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned}\left(I\otimes I\otimes\sigma_x\right)|\kappa\rangle &= \left(I\otimes I\otimes\sigma_x\right)\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(|0\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3\right.\\ &+|0\rangle_1|0\rangle_2|1\rangle_3+|0\rangle_1|1\rangle_2|0\rangle_3\\ &+|0\rangle_1|1\rangle_2|1\rangle_3+|1\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3\\ &-|1\rangle_1|0\rangle_2|1\rangle_3+|1\rangle_1|1\rangle_2|0\rangle_3\\ &\left.+|1\rangle_1|1\rangle_2|1\rangle_3\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(|0\rangle_1|0\rangle_2|1\rangle_3 + |0\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3$$
$$+|0\rangle_1|1\rangle_2|1\rangle_3 + |0\rangle_1|1\rangle_2|0\rangle_3$$
$$+|1\rangle_1|0\rangle_2|1\rangle_3 - |1\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3$$
$$+|1\rangle_1|1\rangle_2|1\rangle_3 + |1\rangle_1|1\rangle_2|0\rangle_3\Big) \qquad (3.27)$$

Untuk persamaan (2.92) dioperasikan dengan $(I \otimes I \otimes \sigma_x \otimes \sigma_z)$ dan $(I \otimes I \otimes \sigma_z \otimes \sigma_x)$ dari kiri.

$$(I \otimes I \otimes \sigma_x \otimes \sigma_z)|\mu\rangle = (I \otimes I \otimes \sigma_x \otimes \sigma_z)\frac{1}{4}\Big(|0000\rangle$$
$$+|0001\rangle + |0010\rangle + |0011\rangle$$
$$+|0100\rangle + |0101\rangle + |0110\rangle$$
$$+|0111\rangle + |1000\rangle + |1001\rangle$$
$$+|1010\rangle - |1011\rangle + |1100\rangle$$
$$+|1101\rangle + |1110\rangle + |1111\rangle\Big)$$
$$= \frac{1}{4}\Big(|0010\rangle - |0011\rangle + |0000\rangle$$
$$-|0001\rangle + |0110\rangle - |0111\rangle$$
$$+|0100\rangle - |0101\rangle + |1010\rangle$$
$$-|1011\rangle + |1000\rangle + |1001\rangle$$
$$+|1110\rangle - |1111\rangle + |1100\rangle$$
$$-|1101\rangle\Big) \qquad (3.28)$$

$$
\begin{aligned}
\left(I\otimes I\otimes\sigma_z\otimes\sigma_x\right)\left|\mu\right\rangle = \left(I\otimes I\otimes\sigma_z\otimes\sigma_x\right)\frac{1}{4}\big(&\left|0000\right\rangle \\
&+\left|0001\right\rangle+\left|0010\right\rangle+\left|0011\right\rangle \\
&+\left|0100\right\rangle+\left|0101\right\rangle+\left|0110\right\rangle \\
&+\left|0111\right\rangle+\left|1000\right\rangle+\left|1001\right\rangle \\
&+\left|1010\right\rangle-\left|1011\right\rangle+\left|1100\right\rangle \\
&+\left|1101\right\rangle+\left|1110\right\rangle+\left|1111\right\rangle\big) \\
=\frac{1}{4}\big(&\left|0001\right\rangle+\left|0000\right\rangle-\left|0011\right\rangle \\
&-\left|0010\right\rangle+\left|0101\right\rangle+\left|0100\right\rangle \\
&-\left|0111\right\rangle-\left|0110\right\rangle+\left|1001\right\rangle \\
&+\left|1000\right\rangle-\left|1011\right\rangle+\left|1010\right\rangle \\
&+\left|1101\right\rangle+\left|1100\right\rangle-\left|1111\right\rangle \\
&-\left|1110\right\rangle\big) \qquad (3.29)
\end{aligned}
$$

Untuk persamaan (2.105) dioperasikan dengan $\left(I\otimes I\otimes\sigma_z\right)$ dan $\left(I\otimes I\otimes\sigma_x\right)$ dari kiri.

$$
\begin{aligned}
\left(I\otimes I\otimes\sigma_z\right)\left|GHZ\right\rangle = \left(I\otimes I\otimes\sigma_z\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\big(&\left|0\right\rangle_1\left|0\right\rangle_2\left|0\right\rangle_3 \\
&+\left|1\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2\left|1\right\rangle_3\big) \\
=\frac{1}{\sqrt{2}}\big(&\left|0\right\rangle_1\left|0\right\rangle_2\left|0\right\rangle_3-\left|1\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2\left|1\right\rangle_3\big) \qquad (3.30)
\end{aligned}
$$

$$\left(I\otimes I\otimes\sigma_x\right)\left|GHZ\right\rangle=\left(I\otimes I\otimes\sigma_x\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle_1\left|0\right\rangle_2\left|0\right\rangle_3\right.$$

$$\left.+\left|1\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2\left|1\right\rangle_3\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle_1\left|0\right\rangle_2\left|1\right\rangle_3+\left|1\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2\left|0\right\rangle_3\right) \qquad (3.31)$$

Untuk persamaan (2.106) dioperasikan dengan $\left(I\otimes I\otimes\sigma_z\right)$ dan $\left(I\otimes I\otimes\sigma_x\right)$ dari kiri.

$$\left(I\otimes I\otimes\sigma_z\right)\left|W\right\rangle=\left(I\otimes I\otimes\sigma_z\right)\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\left|001\right\rangle\right.$$

$$\left.+\left|010\right\rangle+\left|100\right\rangle\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\left|001\right\rangle+\left|010\right\rangle+\left|100\right\rangle\right) \qquad (3.32)$$

$$\left(I\otimes I\otimes\sigma_x\right)\left|W\right\rangle=\left(I\otimes I\otimes\sigma_x\right)\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\left|001\right\rangle\right.$$

$$\left.+\left|010\right\rangle+\left|100\right\rangle\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\left|000\right\rangle+\left|011\right\rangle+\left|101\right\rangle\right) \qquad (3.33)$$

Berdasarkan contoh pada persamaan (3.18) sampai (3.33), setelah dilakukan operasi uniter pada masing-masing keadaan, keadaan gugus N = 2, 3, dan 4 qubit, keadaan pada persamaan (2.88), (2.90), (2.92), (2.105), dan (2.106) dapat dilihat bahwa keadaan tersebut masih menjadi keadaan yang terbelit.

3.1.3 Sekumpulan Operator yang Bekerja pada Keadaan Gugus Menghasilkan Keadaan Gugus Tersebut

Keadaan gugus adalah keadaan yang apabila sekumpulan operator dikerjakan pada keadaan tersebut maka akan menghasilkan keadaan itu sendiri.

$$E_a \left|\phi_N\right\rangle = \left|\phi_N\right\rangle \tag{3.34}$$

dengan hubungan operator

$$E_a = X_a \bigotimes_{b \in tetangga(a)} Z_b \tag{3.35}$$

dimana $X = \sigma_x, Y = i\sigma_y, Z = \sigma_z$ (Tang, dkk, 2008).

Kita tinjau kasus untuk keadaan gugus N = 2, 3, dan 4 qubit.

Untuk keadaan gugus N = 2 qubit

$E_1 = X_1 \otimes Z_2$

dan

$$E_1\left|\phi_2\right\rangle = \left(X_1 \otimes Z_2\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle_1\left|-\right\rangle_2 + \left|1\right\rangle_1\left|+\right\rangle_2\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|1\right\rangle_1\left|+\right\rangle_2 + \left|0\right\rangle_1\left|-\right\rangle_2\right) = \left|\phi_2\right\rangle \tag{3.36}$$

Untuk

$E_2 = Y_1 \otimes Y_2$

maka

$$E_2\left|\phi_2\right\rangle = \left(Y_1 \otimes Y_2\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle_1\left|-\right\rangle_2 + \left|1\right\rangle_1\left|+\right\rangle_2\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|1\right\rangle_1\left|+\right\rangle_2 + \left|0\right\rangle_1\left|-\right\rangle_2\right) = \left|\phi_2\right\rangle \tag{3.37}$$

Untuk keadaan gugus N = 3 qubit

$$E_1 = X_1 \otimes Z_2 \otimes I_3$$

dan

$$E_1 |\phi_3\rangle = (X_1 \otimes Z_2 \otimes I_3) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+\rangle_1 |0\rangle_2 |-\rangle_3 - |-\rangle_1 |1\rangle_2 |+\rangle_3 \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+\rangle_1 |0\rangle_2 |-\rangle_3 - |-\rangle_1 |1\rangle_2 |+\rangle_3 \right) = |\phi_3\rangle \qquad (3.38)$$

Untuk

$$E_2 = Y_1 \otimes X_2 \otimes Y_3$$

maka

$$E_2 |\phi_3\rangle = (Y_1 \otimes X_2 \otimes Y_3) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+\rangle_1 |0\rangle_2 |-\rangle_3 - |-\rangle_1 |1\rangle_2 |+\rangle_3 \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-|-\rangle_1 |1\rangle_2 |+\rangle_3 + |+\rangle_1 |0\rangle_2 |-\rangle_3 \right) = |\phi_3\rangle \qquad (3.39)$$

Untuk

$$E_3 = Y_1 \otimes Y_2 \otimes Z_3$$

maka

$$E_3 |\phi_3\rangle = (Y_1 \otimes Y_2 \otimes Z_3) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+\rangle_1 |0\rangle_2 |-\rangle_3 - |-\rangle_1 |1\rangle_2 |+\rangle_3 \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-|-\rangle_1 |1\rangle_2 |+\rangle_3 + |+\rangle_1 |0\rangle_2 |-\rangle_3 \right) = |\phi_3\rangle \qquad (3.40)$$

Untuk keadaan gugus N = 4 qubit

$$E_1 = X_1 \otimes Z_2 \otimes I_3 \otimes I_4$$

dan

$$\begin{aligned}
E_1|\phi_4\rangle &= \left(X_1 \otimes Z_2 \otimes I_3 \otimes I_4\right)\left(\frac{1}{2}\Big[|0\rangle_1|-\rangle_2|0\rangle_3|-\rangle_4\right.\\
&\quad -|0\rangle_1|+\rangle_2|1\rangle_3|+\rangle_4 + |1\rangle_1|+\rangle_2|0\rangle_3|-\rangle_4\\
&\quad \left.-|1\rangle_1|-\rangle_2|1\rangle_3|+\rangle_4\Big]\right)\\
&= \frac{1}{2}\Big[|1\rangle_1|+\rangle_2|0\rangle_3|-\rangle_4 - |1\rangle_1|-\rangle_2|1\rangle_3|+\rangle_4\\
&\quad +|0\rangle_1|-\rangle_2|0\rangle_3|-\rangle_4 - |0\rangle_1|+\rangle_2|1\rangle_3|+\rangle_4\Big]\\
&= |\phi_4\rangle
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Untuk

$$E_2 = Y_1 \otimes Y_2 \otimes Z_3 \otimes I_4$$

maka

$$\begin{aligned}
E_2|\phi_4\rangle &= \left(Y_1 \otimes Y_2 \otimes Z_3 \otimes I_4\right)\left(\frac{1}{2}\Big[|0\rangle_1|-\rangle_2|0\rangle_3|-\rangle_4\right.\\
&\quad -|0\rangle_1|+\rangle_2|1\rangle_3|+\rangle_4 + |1\rangle_1|+\rangle_2|0\rangle_3|-\rangle_4\\
&\quad \left.-|1\rangle_1|-\rangle_2|1\rangle_3|+\rangle_4\Big]\right)\\
&= \frac{1}{2}\Big[|1\rangle_1|+\rangle_2|0\rangle_3|-\rangle_4 - |1\rangle_1|-\rangle_2|1\rangle_3|+\rangle_4\\
&\quad +|0\rangle_1|-\rangle_2|0\rangle_3|-\rangle_4 - |0\rangle_1|+\rangle_2|1\rangle_3|+\rangle_4\Big]\\
&= |\phi_4\rangle
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Untuk

$$E_3 = Z_1 \otimes X_2 \otimes I_3 \otimes X_4$$

maka

$$\begin{aligned}
E_3|\phi_4\rangle = & \left(Z_1 \otimes X_2 \otimes I_3 \otimes X_4\right)\left(\frac{1}{2}\Big[|0\rangle_1|-\rangle_2|0\rangle_3|-\rangle_4\right. \\
& -|0\rangle_1|+\rangle_2|1\rangle_3|+\rangle_4+|1\rangle_1|+\rangle_2|0\rangle_3|-\rangle_4 \\
& \left.-|1\rangle_1|-\rangle_2|1\rangle_3|+\rangle_4\Big]\right) \\
& =\frac{1}{2}\Big[|0\rangle_1|-\rangle_2|0\rangle_3|-\rangle_4-|0\rangle_1|+\rangle_2|1\rangle_3|+\rangle_4 \\
& +|1\rangle_1|+\rangle_2|0\rangle_3|-\rangle_4-|1\rangle_1|-\rangle_2|1\rangle_3|+\rangle_4\Big] \\
& =|\phi_4\rangle
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Untuk

$$E_4 = Y_1 \otimes X_2 \otimes X_3 \otimes Y_4$$

maka

$$\begin{aligned}
E_4|\phi_4\rangle = & \left(Y_1 \otimes X_2 \otimes X_3 \otimes Y_4\right)\left(\frac{1}{2}\Big[|0\rangle_1|-\rangle_2|0\rangle_3|-\rangle_4\right. \\
& -|0\rangle_1|+\rangle_2|1\rangle_3|+\rangle_4+|1\rangle_1|+\rangle_2|0\rangle_3|-\rangle_4 \\
& \left.-|1\rangle_1|-\rangle_2|1\rangle_3|+\rangle_4\Big]\right) \\
& =\frac{1}{2}\Big[-|1\rangle_1|-\rangle_2|1\rangle_3|+\rangle_4+|1\rangle_1|+\rangle_2|0\rangle_3|-\rangle_4 \\
& -|0\rangle_1|+\rangle_2|1\rangle_3|+\rangle_4+|0\rangle_1|-\rangle_2|0\rangle_3|-\rangle_4\Big] \\
& =|\phi_4\rangle
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Sekarang, kita tinjau untuk keadaan pada persamaan (2.88), (2.90), (2.92), (2.105), dan (2.106). Untuk persamaan (2.88) digunakan E_1 dan E_2 pada keadaan gugus N = 2 qubit.

$$E_1 = X_1 \otimes Z_2$$

dan

$$\begin{aligned}
E_1|\gamma\rangle &= (X_1 \otimes Z_2)\frac{1}{2}\big(|0\rangle_1|0\rangle_2 + |0\rangle_1|1\rangle_2 + |1\rangle_1|0\rangle_2 \\
&\quad - |1\rangle_1|1\rangle_2\big) \\
&= \frac{1}{2}\big(|1\rangle_1|0\rangle_2 - |1\rangle_1|1\rangle_2 + |0\rangle_1|0\rangle_2 + |0\rangle_1|1\rangle_2\big) \\
&= |\gamma\rangle
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Untuk

$$E_2 = Y_1 \otimes Y_2$$

maka

$$\begin{aligned}
E_2|\gamma\rangle &= (Y_1 \otimes Y_2)\frac{1}{2}\big(|0\rangle_1|0\rangle_2 + |0\rangle_1|1\rangle_2 + |1\rangle_1|0\rangle_2 \\
&\quad - |1\rangle_1|1\rangle_2\big) \\
&= \frac{1}{2}\big(|1\rangle_1|1\rangle_2 - |1\rangle_1|0\rangle_2 - |0\rangle_1|1\rangle_2 - |0\rangle_1|0\rangle_2\big) \\
&= -|\gamma\rangle
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Walaupun terjadi ketidakkonsistenan pada ruas kiri yang memiliki nilai 1 dan ruas kanan yang memiliki nilai -1 dalam persamaan (3.46), hal ini tidak menjadi masalah. Sehingga untuk kasus persamaan (2.88), untuk E_2 dapat dibuat menjadi $E_2 = -(Y_1 \otimes Y_2)$ sehingga apabila dioperasikan pada $|\gamma\rangle$ akan menghasilkan nilai 1 pada ruas kanan persamaan (3.46).

Untuk persamaan (2.90) digunakan E_1, E_2, dan E_3 pada keadaan gugus N = 3 qubit.

$E_1 = X_1 \otimes Z_2 \otimes I_3$

dan

$$\begin{aligned}
E_1\left|\kappa\right\rangle &= \left(X_1 \otimes Z_2 \otimes I_3\right)\frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\left|0\right\rangle_1\left|0\right\rangle_2\left|0\right\rangle_3 + \left|0\right\rangle_1\left|0\right\rangle_2\left|1\right\rangle_3 \\
&\quad + \left|0\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2\left|0\right\rangle_3 + \left|0\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2\left|1\right\rangle_3 + \left|1\right\rangle_1\left|0\right\rangle_2\left|0\right\rangle_3 \\
&\quad - \left|1\right\rangle_1\left|0\right\rangle_2\left|1\right\rangle_3 + \left|1\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2\left|0\right\rangle_3 + \left|1\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2\left|1\right\rangle_3\Big) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\left|1\right\rangle_1\left|0\right\rangle_2\left|0\right\rangle_3 + \left|1\right\rangle_1\left|0\right\rangle_2\left|1\right\rangle_3 - \left|1\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2\left|0\right\rangle_3 \\
&\quad - \left|1\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2\left|1\right\rangle_3 + \left|0\right\rangle_1\left|0\right\rangle_2\left|0\right\rangle_3 - \left|0\right\rangle_1\left|0\right\rangle_2\left|1\right\rangle_3 \\
&\quad - \left|0\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2\left|0\right\rangle_3 - \left|0\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2\left|1\right\rangle_3\Big) \\
&\neq \left|\kappa\right\rangle
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Untuk

$E_2 = Y_1 \otimes X_2 \otimes Y_3$

maka

$$\begin{aligned}
E_2\left|\kappa\right\rangle &= \left(Y_1 \otimes X_2 \otimes Y_3\right)\frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\left|0\right\rangle_1\left|0\right\rangle_2\left|0\right\rangle_3 + \left|0\right\rangle_1\left|0\right\rangle_2\left|1\right\rangle_3 \\
&\quad + \left|0\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2\left|0\right\rangle_3 + \left|0\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2\left|1\right\rangle_3 + \left|1\right\rangle_1\left|0\right\rangle_2\left|0\right\rangle_3 \\
&\quad - \left|1\right\rangle_1\left|0\right\rangle_2\left|1\right\rangle_3 + \left|1\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2\left|0\right\rangle_3 + \left|1\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2\left|1\right\rangle_3\Big)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(|1\rangle_1|1\rangle_2|1\rangle_3 - |1\rangle_1|1\rangle_2|0\rangle_3 + |1\rangle_1|0\rangle_2|1\rangle_3$$
$$-|1\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3 - |0\rangle_1|1\rangle_2|1\rangle_3 - |0\rangle_1|1\rangle_2|0\rangle_3$$
$$-|0\rangle_1|0\rangle_2|1\rangle_3 + |0\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3\Big)$$
$$\neq |\kappa\rangle \tag{3.48}$$

Untuk
$E_3 = Y_1 \otimes Y_2 \otimes Z_3$
maka

$$E_3|\kappa\rangle = (Y_1 \otimes Y_2 \otimes Z_3)\frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(|0\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3 + |0\rangle_1|0\rangle_2|1\rangle_3$$
$$+|0\rangle_1|1\rangle_2|0\rangle_3 + |0\rangle_1|1\rangle_2|1\rangle_3 + |1\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3$$
$$-|1\rangle_1|0\rangle_2|1\rangle_3 + |1\rangle_1|1\rangle_2|0\rangle_3 + |1\rangle_1|1\rangle_2|1\rangle_3\Big)$$
$$\neq |\kappa\rangle \tag{3.49}$$

Untuk persamaan (2.92) digunakan E_1, E_2, E_3, dan E_4 pada keadaan gugus N = 4 qubit.
$E_1 = X_1 \otimes Z_2 \otimes I_3 \otimes I_4$
dan

$$E_1|\mu\rangle = (X_1 \otimes Z_2 \otimes I_3 \otimes I_4)\frac{1}{4}\Big(|0000\rangle + |0001\rangle + |0010\rangle$$
$$+|0011\rangle + |0100\rangle + |0101\rangle + |0110\rangle + |0111\rangle$$
$$+|1000\rangle + |1001\rangle + |1010\rangle - |1011\rangle + |1100\rangle$$
$$+|1101\rangle + |1110\rangle + |1111\rangle\Big)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\Big(|1000\rangle + |1001\rangle + |1010\rangle + |1011\rangle - |1100\rangle \\
&\quad - |1101\rangle - |1110\rangle - |1111\rangle + |0000\rangle + |0001\rangle \\
&\quad + |0010\rangle - |0011\rangle - |0100\rangle - |0101\rangle - |0110\rangle \\
&\quad - |0111\rangle\Big) \\
&\neq |\mu\rangle
\end{aligned} \tag{3.50}
$$

Untuk

$E_2 = Y_1 \otimes Y_2 \otimes Z_3 \otimes I_4$

maka

$$
\begin{aligned}
E_2|\mu\rangle &= \left(Y_1 \otimes Y_2 \otimes Z_3 \otimes I_4\right)\frac{1}{4}\Big(|0000\rangle + |0001\rangle + |0010\rangle \\
&\quad + |0011\rangle + |0100\rangle + |0101\rangle + |0110\rangle + |0111\rangle \\
&\quad + |1000\rangle + |1001\rangle + |1010\rangle - |1011\rangle + |1100\rangle \\
&\quad + |1101\rangle + |1110\rangle + |1111\rangle\Big) \\
&= \frac{1}{4}\Big(|1100\rangle + |1101\rangle - |1110\rangle - |1111\rangle - |1000\rangle \\
&\quad - |1001\rangle + |1010\rangle + |1011\rangle - |0100\rangle - |0101\rangle \\
&\quad + |0110\rangle - |0111\rangle + |0000\rangle + |0001\rangle - |0010\rangle \\
&\quad - |0011\rangle\Big) \\
&\neq |\mu\rangle
\end{aligned} \tag{3.50}
$$

Untuk

$$E_3 = Z_1 \otimes X_2 \otimes I_3 \otimes X_4$$

maka

$$\begin{aligned}
E_3|\mu\rangle = (Z_1 \otimes X_2 \otimes I_3 \otimes X_4)\frac{1}{4}\big(&|0000\rangle + |0001\rangle + |0010\rangle \\
&+|0011\rangle + |0100\rangle + |0101\rangle + |0110\rangle + |0111\rangle \\
&+|1000\rangle + |1001\rangle + |1010\rangle - |1011\rangle + |1100\rangle \\
&+|1101\rangle + |1110\rangle + |1111\rangle\big) \\
=\frac{1}{4}\big(&|0101\rangle + |0100\rangle + |0111\rangle + |0110\rangle + |0101\rangle \\
&+|0000\rangle + |0011\rangle + |0010\rangle - |1101\rangle - |1100\rangle \\
&-|1111\rangle + |1110\rangle - |1001\rangle - |1000\rangle - |1011\rangle \\
&-|1010\rangle\big) \\
&\neq |\mu\rangle
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Untuk

$$E_4 = Y_1 \otimes X_2 \otimes X_3 \otimes Y_4$$

maka

$$\begin{aligned}
E_4|\mu\rangle = (Y_1 \otimes X_2 \otimes X_3 \otimes Y_4)\frac{1}{4}\big(&|0000\rangle + |0001\rangle + |0010\rangle \\
&+|0011\rangle + |0100\rangle + |0101\rangle + |0110\rangle + |0111\rangle \\
&+|1000\rangle + |1001\rangle + |1010\rangle - |1011\rangle + |1100\rangle \\
&+|1101\rangle + |1110\rangle + |1111\rangle\big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\big(|1111\rangle - |1110\rangle + |1101\rangle - |1100\rangle + |1011\rangle \\
&\quad - |1010\rangle + |1001\rangle - |1000\rangle - |0111\rangle + |0110\rangle \\
&\quad - |0101\rangle - |0100\rangle - |0011\rangle + |0010\rangle - |0001\rangle \\
&\quad + |0000\rangle\big) \\
&\neq |\mu\rangle
\end{aligned} \tag{3.52}
$$

Untuk persamaan (2.105)

$E_1 = X_1 \otimes X_2 \otimes X_3$

dan

$$
\begin{aligned}
E_1|GHZ\rangle &= (X_1 \otimes X_2 \otimes X_3)\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3 \\
&\quad + |1\rangle_1|1\rangle_2|1\rangle_3\big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|1\rangle_1|1\rangle_2|1\rangle_3 + |0\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3\big) \\
&= |GHZ\rangle
\end{aligned} \tag{3.53}
$$

Untuk

$E_2 = Y_1 \otimes X_2 \otimes Y_3$

maka

$$
\begin{aligned}
E_2|GHZ\rangle &= (Y_1 \otimes X_2 \otimes Y_3)\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3 \\
&\quad + |1\rangle_1|1\rangle_2|1\rangle_3\big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|1\rangle_1|1\rangle_2|1\rangle_3 + |0\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3\big) \\
&= |GHZ\rangle
\end{aligned} \tag{3.54}
$$

Untuk

$$E_3 = Y_1 \otimes Y_2 \otimes X_3$$

maka

$$E_1\left|GHZ\right\rangle = \left(Y_1 \otimes Y_2 \otimes X_3\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle_1\left|0\right\rangle_2\left|0\right\rangle_3 + \left|1\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2\left|1\right\rangle_3\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|1\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2\left|1\right\rangle_3 + \left|0\right\rangle_1\left|0\right\rangle_2\left|0\right\rangle_3\right)$$

$$= \left|GHZ\right\rangle \tag{3.55}$$

Untuk persamaan (2.106)

$$E_1 = I_1 \otimes X_2 \otimes X_3$$

dan

$$E_1\left|W\right\rangle = \left(I_1 \otimes X_2 \otimes X_3\right)\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\left|001\right\rangle + \left|010\right\rangle + \left|100\right\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\left|010\right\rangle + \left|001\right\rangle + \left|111\right\rangle\right)$$

$$\neq \left|W\right\rangle \tag{3.56}$$

Untuk

$$E_2 = X_1 \otimes Z_2 \otimes Y_3$$

maka

$$E_2\left|W\right\rangle = \left(X_1 \otimes Z_2 \otimes Y_3\right)\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\left|001\right\rangle + \left|010\right\rangle + \left|100\right\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\left|100\right\rangle + \left|111\right\rangle - \left|001\right\rangle\right)$$

$$\neq \left|W\right\rangle \tag{3.57}$$

Untuk

$$E_3 = Y_1 \otimes Y_2 \otimes X_3$$

maka

$$\begin{aligned} E_2 |W\rangle &= (Y_1 \otimes Y_2 \otimes X_3) \frac{1}{\sqrt{3}} \left(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(|110\rangle - |101\rangle - |011\rangle \right) \\ &\neq |W\rangle \end{aligned} \tag{3.58}$$

Berdasarkan perumusan pada persamaan (3.36) sampai (3.58) dapat dilihat bahwa keadaan gugus untuk N = 2, 3, dan 4 qubit, keadaan pada persamaan (2.88), dan keadaan GHZ pada persamaan (2.105) memenuhi definisi keadaan gugus yang ketiga. Sedangkan untuk keadaan pada persamaan (2.90), (2.92), dan keadaan W pada persamaan (2.106) tidak memenuhi definisi keadaan gugus yang ketiga. Serta berdasarkan perumusan yang telah dilakukan untuk ketiga definisi keadaan gugus, keadaan-keadaan yang memenuhi ketiganya adalah keadaan gugus N = 2, 3, dan 4 qubit, keadaan pada persamaan (2.88), dan keadaan GHZ pada persamaan (2.105).

3.2 Keadaan-Keadaan yang Ekuivalen dengan Keadaan Gugus

Dua keadaan yang dapat ditransformasikan dari satu keadaan ke keadaan yang lainnya dengan operator uniter lokal (*local unitary operator*) merupakan keadaan yang sama (ekuivalen). Setiap keadaan ψ tertentu memiliki kelas yang sama dengan semua keadaan yang diperoleh dari keadaan ψ tersebut dengan melakukan transformasi uniter lokal pada keadaan ψ tersebut (Linden dan Popescu, 1997).

Pertama, dengan melakukan transformasi uniter lokal $\left(I \otimes \sigma_Z\right)$ pada keadaan gugus dua qubit dan dilakukan pula $\left(I \otimes H\right)$ pada keadaan Bell pada persamaan (2.94), $\left|\Phi^+\right\rangle$, maka akan menghasilkan keadaan yang sama. Sehingga, keadaan gugus dua qubit memiliki satu kelas yang sama dengan keadaan Bell dengan melakukan transformasi uniter lokal pada keadaan Bell $\left|\Phi^+\right\rangle$. Berikut ini adalah penurunannya.

Keadaan gugus untuk N = 2 qubit

$$\begin{aligned}|\phi_2\rangle &= \frac{1}{2}\left[|0\rangle_1\left(|0\rangle_2 - |1\rangle_2\right) + |1\rangle_1\left(|0\rangle_2 + |1\rangle_2\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[|0\rangle_1|-\rangle_2 + |1\rangle_1|+\rangle_2\right] \qquad (3.59)\end{aligned}$$

Kemudian $\left|\phi_2\right\rangle$ dilakukan transformasi uniter lokal $\left(I \otimes \sigma_Z\right)$

$$\left(I \otimes \sigma_Z\right)|\phi_2\rangle = \frac{1}{2}\left[|0\rangle_1|+\rangle_2 + |1\rangle_1|-\rangle_2\right] \qquad (3.60)$$

Lalu, diambil keadaan Bell. Keadaan Bell diambil dikarenakan keadaan Bell merupakan keadaan yang terbelit maksimal pada persamaan (2.94).

$$\left|\Phi^+\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left|00\right\rangle + \left|11\right\rangle\right] \qquad (3.61)$$

Selanjutnya keadaan Bell $\left|\Phi^+\right\rangle$ dilakukan transformasi uniter lokal dengan operator $\left(I \otimes H\right)$

$$\left(I \otimes H\right)\left|\Phi^+\right\rangle = \frac{1}{2}\left[|0\rangle_1|+\rangle_2 + |1\rangle_1|-\rangle_2\right] \qquad (3.62)$$

Maka,

$$\left(I\otimes\sigma_Z\right)\left|\phi_2\right\rangle=\left(I\otimes H\right)\left|\Phi^+\right\rangle$$

$$\left|\phi_2\right\rangle=\left(I\otimes\sigma_Z\right)^{-1}\left(I\otimes H\right)\left|\Phi^+\right\rangle$$

$$=\left(I\otimes\sigma_Z\right)\left(I\otimes H\right)\left|\Phi^+\right\rangle$$

$$=\left(I\otimes\sigma_Z H\right)\left|\Phi^+\right\rangle \tag{3.63}$$

Sehingga keadaan Bell $\left|\Phi^+\right\rangle$ berada dalam satu kelas yang sama dengan keadaan gugus dua qubit $\left|\phi_2\right\rangle$. Apabila dilakukan substitusi $\left|-\right\rangle\leftrightarrow\left|0\right\rangle$ dan $\left|+\right\rangle\leftrightarrow\left|1\right\rangle$ maka $\left|\phi_2\right\rangle=\left|\Phi^+\right\rangle$.

Kedua, dengan melakukan transformasi uniter lokal $\left(I\otimes\sigma_Z\otimes\sigma_Z\right)$ pada keadaan gugus tiga qubit dan dilakukan pula $\left(H\otimes I\otimes H\right)$ pada keadaan GHZ pada persamaan (2.105), $\left|GHZ\right\rangle$, maka akan menghasilkan keadaan yang sama. Sehingga, keadaan gugus tiga qubit memiliki satu kelas yang sama dengan keadaan GHZ dengan melakukan operator uniter lokal pada keadaan GHZ. Berikut ini adalah penurunannya.

Keadaan gugus untuk N = 3 qubit

$$\left|\phi_3\right\rangle=\frac{1}{2}\Big[\left|0\right\rangle_1\left|0\right\rangle_2\left|-\right\rangle_3-\left|0\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2\left|+\right\rangle_3$$

$$+\left|1\right\rangle_1\left|0\right\rangle_2\left|-\right\rangle_3+\left|1\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2\left|+\right\rangle_3\Big]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\left|+\right\rangle_1\left|0\right\rangle_2\left|-\right\rangle_3-\left|-\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2\left|+\right\rangle_3\Big] \tag{3.64}$$

Kemudian $\left|\phi_2\right\rangle$ dilakukan transformasi uniter lokal $\left(I\otimes\sigma_Z\otimes\sigma_Z\right)$

$$\left(I\otimes\sigma_Z\otimes\sigma_Z\right)\left|\phi_3\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\left|+\right\rangle_1\left|0\right\rangle_2\left|+\right\rangle_3 +\left|-\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2\left|-\right\rangle_3\Big] \tag{3.65}$$

Lalu, diambil keadaan GHZ karena keadaan GHZ merupakan keadaan yang terbelit maksimal

$$\left|GHZ\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|000\right\rangle+\left|111\right\rangle \tag{3.66}$$

Selanjutnya keadaan GHZ $\left|GHZ\right\rangle$ dilakukan transformasi uniter lokal dengan operator $\left(H\otimes I\otimes H\right)$

$$\left(H\otimes I\otimes H\right)\left|GHZ\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\left|+\right\rangle_1\left|0\right\rangle_2\left|+\right\rangle_3 +\left|-\right\rangle_1\left|1\right\rangle_2\left|-\right\rangle_3\Big] \tag{3.67}$$

$$\begin{aligned}\left(I\otimes\sigma_Z\otimes\sigma_Z\right)\left|\phi_3\right\rangle&=\left(H\otimes I\otimes H\right)\left|GHZ\right\rangle\\ \left|\phi_3\right\rangle&=\left(I\otimes\sigma_Z\otimes\sigma_Z\right)^{-1}\left(H\otimes I\otimes H\right)\left|GHZ\right\rangle\\ &=\left(I\otimes\sigma_Z\otimes\sigma_Z\right)\left(H\otimes I\otimes H\right)\left|GHZ\right\rangle\\ &=\left(H\otimes\sigma_Z\otimes\sigma_Z H\right)\left|GHZ\right\rangle\end{aligned} \tag{3.68}$$

Sehingga keadaan GHZ $\left|GHZ\right\rangle$ berada dalam satu kelas yang sama dengan keadaan gugus tiga qubit $\left|\phi_3\right\rangle$. Apabila dilakukan substitusi $\left|-\right\rangle\leftrightarrow\left|1\right\rangle$ dan $\left|+\right\rangle\leftrightarrow\left|0\right\rangle$ maka $\left|\phi_3\right\rangle=\left|GHZ\right\rangle$.

Ketiga, dengan melakukan transformasi uniter lokal $\left(\sigma_X\otimes I\otimes\sigma_Z\otimes\sigma_Z\right)$ pada keadaan gugus empat qubit dan dilakukan pula $\left(H \otimes I \otimes I \otimes H\right)$ pada suatu keadaan $\left|\psi\right\rangle_{1234}$ maka akan menghasilkan keadaan yang sama. Sehingga, keadaan gugus empat qubit memiliki satu kelas yang sama dengan keadaan $\left|\psi\right\rangle_{1234}$ dengan melakukan operator uniter lokal pada keadaan $\left|\psi\right\rangle_{1234}$. Berikut ini adalah penurunannya.

Keadaan gugus N = 4 qubit

$$\left|\phi_4\right\rangle = \frac{1}{2}\left(\left|0\right\rangle_1 \otimes \sigma_Z{}^{(2)} \otimes I \otimes I + \left|1\right\rangle_1 \otimes I \otimes I \otimes I\right)$$
$$\left(\left|+\right\rangle_1 \left|0\right\rangle_2 \left|-\right\rangle_3 - \left|-\right\rangle_1 \left|1\right\rangle_2 \left|+\right\rangle_3\right)$$
$$= \frac{1}{2}\Big[\left|0\right\rangle_1 \left|-\right\rangle_2 \left|0\right\rangle_3 \left|-\right\rangle_4 - \left|0\right\rangle_1 \left|+\right\rangle_2 \left|1\right\rangle_3 \left|+\right\rangle_4$$
$$+ \left|1\right\rangle_1 \left|+\right\rangle_2 \left|0\right\rangle_3 \left|-\right\rangle_4 - \left|1\right\rangle_1 \left|-\right\rangle_2 \left|1\right\rangle_3 \left|+\right\rangle_4\Big] \tag{3.69}$$

Dengan membuka keadaan partikel kedua sehingga akan menjadi

$$\left|\phi_4\right\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big[\left|0\right\rangle_1 \left|0\right\rangle_2 \left|0\right\rangle_3 \left|-\right\rangle_4 - \left|0\right\rangle_1 \left|1\right\rangle_2 \left|0\right\rangle_3 \left|-\right\rangle_4$$
$$- \left|0\right\rangle_1 \left|0\right\rangle_2 \left|1\right\rangle_3 \left|+\right\rangle_4 - \left|0\right\rangle_1 \left|1\right\rangle_2 \left|1\right\rangle_3 \left|+\right\rangle_4$$
$$+ \left|1\right\rangle_1 \left|0\right\rangle_2 \left|0\right\rangle_3 \left|-\right\rangle_4 + \left|1\right\rangle_1 \left|1\right\rangle_2 \left|0\right\rangle_3 \left|-\right\rangle_4$$
$$- \left|1\right\rangle_1 \left|0\right\rangle_2 \left|1\right\rangle_3 \left|+\right\rangle_4 + \left|1\right\rangle_1 \left|1\right\rangle_2 \left|1\right\rangle_3 \left|+\right\rangle_4\Big] \tag{3.70}$$

Lalu, keadaan yang memiliki keadaan yang sama pada partikel 2,3, dan 4 digabungkan dan dibentuk kedalam keadaan Bell, maka $\left|\phi_4\right\rangle$ akan menjadi

$$\left|\phi\right\rangle_4 = \frac{1}{2}\Big[\left|+\right\rangle_1 \left|0\right\rangle_2 \left|0\right\rangle_3 \left|-\right\rangle_4 - \left|-\right\rangle_1 \left|1\right\rangle_2 \left|0\right\rangle_3 \left|-\right\rangle_4$$
$$- \left|+\right\rangle_1 \left|0\right\rangle_2 \left|1\right\rangle_3 \left|+\right\rangle_4 - \left|-\right\rangle_1 \left|1\right\rangle_2 \left|1\right\rangle_3 \left|+\right\rangle_4\Big] \tag{3.71}$$

Kemudian keadaan $\left|\phi_4\right\rangle$ dilakukan transformasi uniter lokal dengan mengoperasikan $\left(\sigma_X \otimes I \otimes \sigma_Z \otimes \sigma_Z\right)$.

$$\begin{aligned}\left(\sigma_X \otimes I \otimes \sigma_Z \otimes \sigma_Z\right)\left|\phi_4\right\rangle = \frac{1}{2}\Big[&\left|+\right\rangle_1 \left|0\right\rangle_2 \left|0\right\rangle_3 \left|+\right\rangle_4 \\ &+\left|-\right\rangle_1 \left|1\right\rangle_2 \left|0\right\rangle_3 \left|+\right\rangle_4 \\ &+\left|+\right\rangle_1 \left|0\right\rangle_2 \left|1\right\rangle_3 \left|-\right\rangle_4 \\ &-\left|-\right\rangle_1 \left|1\right\rangle_2 \left|1\right\rangle_3 \left|-\right\rangle_4 \Big] \\ = \frac{1}{2}\Big[&\left|+\right\rangle_1 \left|0\right\rangle_2 \left|0\right\rangle_3 \left|+\right\rangle_4 \\ &+\left|+\right\rangle_1 \left|0\right\rangle_2 \left|1\right\rangle_3 \left|-\right\rangle_4 \\ &+\left|-\right\rangle_1 \left|1\right\rangle_2 \left|0\right\rangle_3 \left|+\right\rangle_4 \\ &-\left|-\right\rangle_1 \left|1\right\rangle_2 \left|1\right\rangle_3 \left|-\right\rangle_4 \Big]\end{aligned} \tag{3.72}$$

Diambil suatu keadaan

$$\left|\psi\right\rangle_{1234} = \frac{1}{2}\Big[\left|0000\right\rangle + \left|0011\right\rangle + \left|1100\right\rangle - \left|1111\right\rangle\Big]_{1234} \tag{3.73}$$

Kemudian keadaan $\left|\psi\right\rangle_{1234}$ dilakukan transformasi uniter lokal dengan mengoperasikan $\left(H \otimes I \otimes I \otimes H\right)$.

$$\begin{aligned}\left(H \otimes I \otimes I \otimes H\right)\left|\psi\right\rangle_{1234} = \frac{1}{2}\Big[&\left|+\right\rangle_1 \left|0\right\rangle_2 \left|0\right\rangle_3 \left|+\right\rangle_4 \\ &+\left|+\right\rangle_1 \left|0\right\rangle_2 \left|1\right\rangle_3 \left|-\right\rangle_4 \\ &+\left|-\right\rangle_1 \left|1\right\rangle_2 \left|0\right\rangle_3 \left|+\right\rangle_4 \\ &-\left|-\right\rangle_1 \left|1\right\rangle_2 \left|1\right\rangle_3 \left|-\right\rangle_4 \Big]\end{aligned} \tag{3.75}$$

Sehingga

$$
\begin{aligned}
(\sigma_X \otimes I \otimes \sigma_Z \otimes \sigma_Z)|\phi_4\rangle &= (H \otimes I \otimes I \otimes H)|\psi\rangle_{1234} \\
&= (\sigma_X \otimes I \otimes \sigma_Z \otimes \sigma_Z)^{-1} \\
&\quad (H \otimes I \otimes I \otimes H)|\psi\rangle_{1234} \\
&= (\sigma_X \otimes I \otimes \sigma_Z \otimes \sigma_Z) \\
&\quad (H \otimes I \otimes I \otimes H)|\psi\rangle_{1234} \\
&= (\sigma_X H \otimes I \otimes \sigma_Z \\
&\quad \otimes \sigma_Z H)|\psi\rangle_{1234}
\end{aligned}
\tag{3.76}
$$

Berdasarkan persamaan (3.35), keadaan gugus empat qubit $|\phi_4\rangle$ memiliki kelas yang sama dengan keadaan $|\psi\rangle_{1234}$ dan merupakan keadaan yang ekuivalen atau sama. Apabila dilakukan substitusi $|-\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ dan $|+\rangle \leftrightarrow |0\rangle$ maka $|\phi_4\rangle = |\psi\rangle_{1234}$.

BAB IV
TELEPORTASI KUANTUM MELALUI KEADAAN GUGUS EMPAT QUBIT

4.1 Teleportasi Kuantum Informasi Keadaan Satu Qubit Sembarang Melalui Keadaan Gugus Empat Qubit

Diberikan keadaan atau informasi satu qubit sembarang

$$\left|\chi\right\rangle_a = \alpha\left|0\right\rangle_a + \beta\left|1\right\rangle_a \tag{4.1}$$

dengan $\left|\alpha\right|^2 + \left|\beta\right|^2 = 1$.

Informasi partikel satu qubit sembarang tersebut akan dikirim dari Alice menuju Bob melalui protokol dari persamaan (3.60) yang ekuivalen dengan keadaan gugus empat qubit yang diberikan pada Alice dan Bob.

$$\left|\psi\right\rangle_{1234} = \frac{1}{2}\left[\left|0000\right\rangle + \left|0011\right\rangle + \left|1100\right\rangle - \left|1111\right\rangle\right]_{1234}$$

Partikel 1, 2, dan 3 diberikan kepada Alice dikarenakan Alice akan melakukan pengukuran pada partikel a, 1, 2, dan 3 agar keadaan atau informasi $\left|\chi\right\rangle_a$ dapat diteleportasikan dari Alice menuju Bob dan partikel 4 diberikan kepada Bob karena Bob harus memiliki partikel dengan jumlah yang sama dengan jumlah partikel pada keadaan yang dikirim agar dapat menerima keadaan yang dikirim oleh Alice. Akibat dari pengukuran Alice, keadaan pada partikel a akan melebur pada keadaan gugus empat qubit. Sehingga keadaan seluruh sistem menjadi sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\left|\Phi_1\right\rangle &= \left|\chi\right\rangle_a \otimes \left|\psi\right\rangle_{1234} \\
&= \alpha\left|0\right\rangle_a + \beta\left|1\right\rangle_a \\
&\quad \otimes\left[\frac{1}{2}\left|0000\right\rangle + \left|0011\right\rangle + \left|1100\right\rangle - \left|1111\right\rangle\right]_{1234} \\
&= \frac{1}{2}\alpha\left|00000\right\rangle_{a1234} + \alpha\left|00011\right\rangle_{a1234} \\
&\quad +\alpha\left|01100\right\rangle_{a1234} - \alpha\left|01111\right\rangle_{a1234} \\
&\quad +\beta\left|10000\right\rangle_{a1234} + \beta\left|10011\right\rangle_{a1234} \\
&\quad +\beta\left|11100\right\rangle_{a1234} - \beta\left|11111\right\rangle_{a1234}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Pengukuran yang dilakukan oleh Alice pada partikel a, 1, 2, dan 3 secara langsung akan berlaku pada seluruh sistem akibat keadaan satu qubit sembarang $\left|\chi\right\rangle_a$ yang melebur pada keadaan gugus empat qubit. Pengukuran yang dilakukan Alice adalah $\left(\left\langle\varphi\right|\otimes I\right)$ pada keadaan seluruh sistem $\left|\Phi_1\right\rangle$ dimana pengukuran $\left|\varphi\right\rangle$ adalah sebagai berikut.

$$\left|\varphi_1\right\rangle_{a123} = \frac{1}{2}\left[\left|0000\right\rangle + \left|0110\right\rangle + \left|1001\right\rangle - \left|1111\right\rangle\right]_{a123} \tag{4.3}$$

$$\left|\varphi_2\right\rangle_{a123} = \frac{1}{2}\left[\left|0000\right\rangle + \left|0110\right\rangle - \left|1001\right\rangle + \left|1111\right\rangle\right]_{a123} \tag{4.4}$$

$$\left|\varphi_3\right\rangle_{a123} = \frac{1}{2}\left[\left|0001\right\rangle - \left|0111\right\rangle + \left|1000\right\rangle + \left|1110\right\rangle\right]_{a123} \tag{4.5}$$

$$\left|\varphi_1\right\rangle_{a123} = \frac{1}{2}\left[\left|0001\right\rangle - \left|0111\right\rangle - \left|1000\right\rangle - \left|1110\right\rangle\right]_{a123} \tag{4.6}$$

Pengukuran yang dilakukan oleh Alice dijabarkan pada Lampiran A. Setelah dilakukan pengukuran $\left\langle\varphi\right| \otimes I \left|\Phi_1\right\rangle$ maka

Alice akan mendapatkan hasil pengukuran. Hasil pengukuran itu merupakan keadaan yang sampai pada Bob. Namun, keadaan atau informasi yang diterima oleh Bob belum sesuai dengan keadaan $\left|\chi\right\rangle_a$ yang dikirim oleh Alice. Kemudian, Alice harus memberikan informasi melalui komunikasi klasik kepada Bob mengenai pengukuran atau operasi operator uniter yang harus dilakukan oleh Bob agar keadaan yang diterima oleh Bob sesuai dengan keadaan yang dikirim oleh Alice pada persamaan (4.1). Hasil pengukuran Alice atau keadaan yang sampai pada Bob dan operator uniter yang harus digunakan Bob agar keadaan yang sampai atau diterima pada Bob sesuai dengan keadaan yang dikirim oleh Alice pada persamaan (4.1) dirangkum pada Tabel 4.1 sebagai berikut.

Tabel 4.1 Tabel Pengukuran, Keadaan yang Diterima Bob dan Operator Uniter Bob untuk Partikel Satu Qubit Sembarang

Pengukuran	Keadaan yang diterima Bob	Operator Uniter Bob
$\left\|\varphi_1\right\rangle_{a123}$	$\frac{1}{2}\left[\alpha\left\|0\right\rangle_4+\beta\left\|1\right\rangle_4\right]$	$2I$
$\left\|\varphi_2\right\rangle_{a123}$	$\frac{1}{2}\left[\alpha\left\|0\right\rangle_4-\beta\left\|1\right\rangle_4\right]$	$2\sigma_z$
$\left\|\varphi_3\right\rangle_{a123}$	$\frac{1}{2}\left[\alpha\left\|1\right\rangle_4+\beta\left\|0\right\rangle_4\right]$	$2\sigma_x$
$\left\|\varphi_4\right\rangle_{a123}$	$\frac{1}{2}\left[\alpha\left\|1\right\rangle_4-\beta\left\|0\right\rangle_4\right]$	$2i\sigma_y$

Berdasarkan Tabel 4.1 dapat dilihat bahwa keadaan partikel satu qubit sembarang $\left|\chi\right\rangle_a$ dapat ditelportasikan melalui keadaan gugus empat qubit $\left|\psi\right\rangle_{1234}$.

4.2 Teleportasi Kuantum Informasi Keadaan Dua Qubit Sembarang Melalui Keadaan Gugus Empat Qubit

Diberikan keadaan atau informasi dua qubit sembarang

$$\left|\theta\right\rangle_{ab} = \alpha\left|00\right\rangle_{ab} + \beta\left|01\right\rangle_{ab} + \gamma\left|10\right\rangle_{ab} + \delta\left|11\right\rangle_{ab} \qquad (4.7)$$

dimana $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$

Informasi partikel dua qubit sembarang tersebut akan dikirim dari Alice menuju Bob melalui protokol dari persamaan (3.60) yang ekuivalen dengan keadaan gugus empat qubit yang diberikan pada Alice dan Bob..

$$\left|\psi\right\rangle_{1234} = \frac{1}{2}\left[\left|0000\right\rangle + \left|0011\right\rangle + \left|1100\right\rangle - \left|1111\right\rangle\right]_{1234} \qquad (4.8)$$

Partikel 1 dan 4 diberikan kepada Alice dikarenakan Alice akan melakukan pengukuran pada partikel a, b, 1, dan 4 agar keadaan atau informasi $\left|\theta\right\rangle_{ab}$ dapat diteleportasikan dari Alice menuju Bob dan partikel 2 dan 3 diberikan kepada Bob karena Bob harus memiliki partikel dengan jumlah yang sama dengan jumlah partikel pada keadaan yang dikirim agar dapat menerima keadaan yang dikirim oleh Alice. Akibat dari pengukuran Alice, keadaan $\left|\theta\right\rangle_{ab}$ akan melebur pada keadaan gugus empat qubit. Sehingga keadaan seluruh sistem menjadi sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\left|\Phi_2\right\rangle &= \left|\theta\right\rangle_{ab} \otimes \left|\psi\right\rangle_{1234} \\ &= \left[\alpha\left|00\right\rangle_{ab} + \beta\left|01\right\rangle_{ab} + \gamma\left|10\right\rangle_{ab} + \delta\left|11\right\rangle_{ab}\right] \otimes \\ &\quad \frac{1}{2}\left[\left|0000\right\rangle + \left|0011\right\rangle + \left|1100\right\rangle - \left|1111\right\rangle\right]_{1234}\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}\Big(\alpha|000000\rangle+\alpha|000011\rangle+\alpha|001100\rangle$$
$$-\alpha|001111\rangle+\beta|010000\rangle+\beta|010011\rangle$$
$$+\beta|011100\rangle-\beta|011111\rangle+\gamma|100000\rangle$$
$$+\gamma|100011\rangle+\gamma|101100\rangle-\gamma|101111\rangle$$
$$+\delta|110000\rangle+\delta|110011\rangle+\delta|111100\rangle$$
$$-\delta|111111\rangle\Big) \tag{4.9}$$

Pengukuran yang dilakukan oleh Alice pada partikel a , b , 1, dan 4 secara langsung akan berlaku pada seluruh sistem akibat keadaan dua qubit sembarang $|\theta\rangle_{ab}$ yang melebur pada keadaan gugus empat qubit. Pengukuran yang dilakukan Alice adalah $\left(\langle\phi|\otimes I\right)$ pada keadaan seluruh sistem $|\Phi_2\rangle$ dimana pengukuran $|\phi\rangle$ adalah sebagai berikut.

$$|\phi_1\rangle_{ab14}=\frac{1}{2}\big[|0000\rangle+|0101\rangle+|1010\rangle-|1111\rangle\big]_{ab14} \tag{4.10}$$

$$|\phi_2\rangle_{ab14}=\frac{1}{2}\big[|0000\rangle-|0101\rangle-|1010\rangle-|1111\rangle\big]_{ab14} \tag{4.11}$$

$$|\phi_3\rangle_{ab14}=\frac{1}{2}\big[|0000\rangle-|0101\rangle+|1010\rangle+|1111\rangle\big]_{ab14} \tag{4.12}$$

$$|\phi_4\rangle_{ab14}=\frac{1}{2}\big[|0000\rangle+|0101\rangle-|1010\rangle+|1111\rangle\big]_{ab14} \tag{4.13}$$

$$|\phi_5\rangle_{ab14}=\frac{1}{2}\big[|0001\rangle+|0100\rangle-|1011\rangle+|1110\rangle\big]_{ab14} \tag{4.14}$$

$$|\phi_6\rangle_{ab14}=\frac{1}{2}\big[|0001\rangle-|0100\rangle+|1011\rangle+|1110\rangle\big]_{ab14} \tag{4.15}$$

$$\left|\phi_7\right\rangle_{ab14} = \frac{1}{2}\left[\left|0001\right\rangle - \left|0100\right\rangle - \left|1011\right\rangle - \left|1110\right\rangle\right]_{ab14} \quad (4.16)$$

$$\left|\phi_8\right\rangle_{ab14} = \frac{1}{2}\left[\left|0001\right\rangle + \left|0100\right\rangle + \left|1011\right\rangle - \left|1110\right\rangle\right]_{ab14} \quad (4.17)$$

$$\left|\phi_9\right\rangle_{ab14} = \frac{1}{2}\left[\left|0010\right\rangle - \left|0111\right\rangle + \left|1000\right\rangle + \left|1101\right\rangle\right]_{ab14} \quad (4.18)$$

$$\left|\phi_{10}\right\rangle_{ab14} = \frac{1}{2}\left[\left|0010\right\rangle + \left|0111\right\rangle - \left|1000\right\rangle + \left|1101\right\rangle\right]_{ab14} \quad (4.19)$$

$$\left|\phi_{11}\right\rangle_{ab14} = \frac{1}{2}\left[\left|0010\right\rangle + \left|0111\right\rangle + \left|1000\right\rangle - \left|1101\right\rangle\right]_{ab14} \quad (4.20)$$

$$\left|\phi_{12}\right\rangle_{ab14} = \frac{1}{2}\left[\left|0010\right\rangle - \left|0111\right\rangle - \left|1000\right\rangle - \left|1101\right\rangle\right]_{ab14} \quad (4.21)$$

$$\left|\phi_{13}\right\rangle_{ab14} = \frac{1}{2}\left[-\left|0011\right\rangle + \left|0110\right\rangle + \left|1001\right\rangle + \left|1100\right\rangle\right]_{ab14} \quad (4.22)$$

$$\left|\phi_{14}\right\rangle_{ab14} = \frac{1}{2}\left[-\left|0011\right\rangle - \left|0110\right\rangle - \left|1001\right\rangle + \left|1100\right\rangle\right]_{ab14} \quad (4.23)$$

$$\left|\phi_{15}\right\rangle_{ab14} = \frac{1}{2}\left[-\left|0011\right\rangle - \left|0110\right\rangle + \left|1001\right\rangle - \left|1100\right\rangle\right]_{ab14} \quad (4.24)$$

$$\left|\phi_{16}\right\rangle_{ab14} = \frac{1}{2}\left[-\left|0011\right\rangle + \left|0110\right\rangle - \left|1001\right\rangle - \left|1100\right\rangle\right]_{ab14} \quad (4.25)$$

Pengukuran yang dilakukan oleh Alice dijabarkan pada Lampiran B. Setelah dilakukan pengukuran $\left\langle\phi\right| \otimes I \left|\Phi_2\right\rangle$ maka Alice akan mendapatkan hasil pengukuran. Hasil pengukuran itu merupakan keadaan yang sampai pada Bob. Namun, keadaan atau informasi yang diterima oleh Bob belum sesuai dengan keadaan $\left|\theta\right\rangle_{ab}$ yang dikirim oleh Alice. Kemudian, Alice harus memberikan informasi melalui komunikasi klasik kepada Bob mengenai pengukuran atau operasi operator uniter yang harus dilakukan oleh Bob agar keadaan yang diterima oleh Bob sesuai dengan keadaan yang dikirim oleh Alice pada persamaan (4.7). Hasil pengukuran Alice atau keadaan yang sampai pada Bob dan operator uniter yang harus digunakan Bob agar keadaan yang sampai atau diterima pada Bob sesuai dengan keadaan yang dikirim oleh Alice pada persamaan (4.7) dirangkum pada Tabel 4.2 sebagai berikut.

Tabel 4.2 Tabel Pengukuran, Keadaan yang Diterima Bob dan Operator Uniter Bob untuk Partikel Dua Qubit Sembarang

Pengu-kuran	Keadaan yang diterima Bob	Operator Uniter Bob
$\left\|\phi_1\right\rangle_{ab14}$	$\frac{1}{4}\left[\alpha\left\|00\right\rangle_{23}+\beta\left\|01\right\rangle_{23}+\gamma\left\|10\right\rangle_{23}+\delta\left\|11\right\rangle_{23}\right]$	$2I\otimes 2I$
$\left\|\phi_2\right\rangle_{ab14}$	$\frac{1}{4}\left[\alpha\left\|00\right\rangle_{23}-\beta\left\|01\right\rangle_{23}-\gamma\left\|10\right\rangle_{23}+\delta\left\|11\right\rangle_{23}\right]$	$2\sigma_z\otimes 2\sigma_z$
$\left\|\phi_3\right\rangle_{ab14}$	$\frac{1}{4}\left[\alpha\left\|00\right\rangle_{23}-\beta\left\|01\right\rangle_{23}+\gamma\left\|10\right\rangle_{23}-\delta\left\|11\right\rangle_{23}\right]$	$2I\otimes 2\sigma_z$
$\left\|\phi_4\right\rangle_{ab14}$	$\frac{1}{4}\left[\alpha\left\|00\right\rangle_{23}+\beta\left\|01\right\rangle_{23}-\gamma\left\|10\right\rangle_{23}-\delta\left\|11\right\rangle_{23}\right]$	$2\sigma_z\otimes 2I$
$\left\|\phi_5\right\rangle_{ab14}$	$\frac{1}{4}\left[\alpha\left\|01\right\rangle_{23}+\beta\left\|00\right\rangle_{23}+\gamma\left\|11\right\rangle_{23}+\delta\left\|10\right\rangle_{23}\right]$	$2I\otimes 2\sigma_x$
$\left\|\phi_6\right\rangle_{ab14}$	$\frac{1}{4}\left[\alpha\left\|01\right\rangle_{23}-\beta\left\|00\right\rangle_{23}-\gamma\left\|11\right\rangle_{23}+\delta\left\|10\right\rangle_{23}\right]$	$2\sigma_z\otimes 2i\sigma_y$

$\left\|\phi_7\right\rangle_{ab14}$	$\frac{1}{4}\left[\alpha\left\|01\right\rangle_{23}-\beta\left\|00\right\rangle_{23}+\gamma\left\|11\right\rangle_{23}-\delta\left\|10\right\rangle_{23}\right]$	$2I\otimes 2i\sigma_y$
$\left\|\phi_8\right\rangle_{ab14}$	$\frac{1}{4}\left[\alpha\left\|01\right\rangle_{23}+\beta\left\|00\right\rangle_{23}-\gamma\left\|11\right\rangle_{23}-\delta\left\|10\right\rangle_{23}\right]$	$2\sigma_z\otimes 2\sigma_x$
$\left\|\phi_9\right\rangle_{ab14}$	$\frac{1}{4}\left[\alpha\left\|10\right\rangle_{23}+\beta\left\|11\right\rangle_{23}+\gamma\left\|00\right\rangle_{23}+\delta\left\|01\right\rangle_{23}\right]$	$2\sigma_x\otimes 2I$
$\left\|\phi_{10}\right\rangle_{ab14}$	$\frac{1}{4}\left[\alpha\left\|10\right\rangle_{23}-\beta\left\|11\right\rangle_{23}-\gamma\left\|00\right\rangle_{23}+\delta\left\|01\right\rangle_{23}\right]$	$2i\sigma_y\otimes 2\sigma_z$
$\left\|\phi_{11}\right\rangle_{ab14}$	$\frac{1}{4}\left[\alpha\left\|10\right\rangle_{23}-\beta\left\|11\right\rangle_{23}+\gamma\left\|00\right\rangle_{23}-\delta\left\|01\right\rangle_{23}\right]$	$2\sigma_x\otimes 2\sigma_z$
$\left\|\phi_{12}\right\rangle_{ab14}$	$\frac{1}{4}\left[\alpha\left\|10\right\rangle_{23}+\beta\left\|11\right\rangle_{23}-\gamma\left\|00\right\rangle_{23}-\delta\left\|01\right\rangle_{23}\right]$	$2i\sigma_y\otimes 2I$
$\left\|\phi_{13}\right\rangle_{ab14}$	$\frac{1}{4}\left[\alpha\left\|11\right\rangle_{23}+\beta\left\|10\right\rangle_{23}+\gamma\left\|01\right\rangle_{23}+\delta\left\|00\right\rangle_{23}\right]$	$2\sigma_x\otimes 2\sigma_x$
$\left\|\phi_{14}\right\rangle_{ab14}$	$\frac{1}{4}\left[\alpha\left\|11\right\rangle_{23}-\beta\left\|10\right\rangle_{23}-\gamma\left\|01\right\rangle_{23}+\delta\left\|00\right\rangle_{23}\right]$	$2i\sigma_y\otimes 2i\sigma_y$
$\left\|\phi_{15}\right\rangle_{ab14}$	$\frac{1}{4}\left[\alpha\left\|11\right\rangle_{23}-\beta\left\|10\right\rangle_{23}+\gamma\left\|01\right\rangle_{23}-\delta\left\|00\right\rangle_{23}\right]$	$2\sigma_x\otimes 2i\sigma_y$
$\left\|\phi_{16}\right\rangle_{ab14}$	$\frac{1}{4}\left[\alpha\left\|11\right\rangle_{23}+\beta\left\|10\right\rangle_{23}-\gamma\left\|01\right\rangle_{23}-\delta\left\|00\right\rangle_{23}\right]$	$2i\sigma_y\otimes 2\sigma_x$

Berdasarkan Tabel 4.2 dapat dilihat bahwa keadaan partikel dua qubit sembarang $\left|\theta\right\rangle_{ab}$ dapat dikirim melalui keadaan gugus empat qubit $\left|\psi\right\rangle_{1234}$.

“ halaman ini sengaja dikosongkan ”

BAB V
KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan penyelidikan keadaan gugus dua, tiga, dan empat qubit dan perumusan teleportasi informasi satu qubit dan dua qubit sembarang melalui keadaan gugus empat qubit diperoleh kesimpulan bahwa :

1. Keadaan gugus memiliki tiga definisi yaitu terbelit maksimal, ketahanan tinggi, dan apabila sekumpulan operator dioperasikan pada keadaan gugus tersebut maka akan menghasilkan keadaan gugus itu sendiri.
2. Keadaan gugus dua qubit ekuivalen dengan keadaan Bell, keadaan gugus tiga qubit ekuivalen dengan keadaan GHZ, dan keadaan gugus empat qubit ekuivalen dengan keadaan $\left|\psi\right\rangle_{1234}$.
3. Keadaan satu qubit dan dua qubit sembarang dapat diteleportasikan melalui saluran keadaan gugus empat qubit.

5.2 Saran

Setelah dilakukannya penelitian ini, disarankan untuk penelitian selanjutnya beralih pada pengiriman keadaan tiga qubit dan keadaan tiga qubit sembarang dan mengganti saluran pengiriman dengan keadaan terbelit empat qubit lain yang ekuivalen dengan keadaan gugus empat qubit serta dengan saluran keadaan gugus yang lebih besar dari empat qubit.

“ halaman ini sengaja dikosongkan ”

DAFTAR PUSTAKA

Bell, J.S. *On The Einstein Podolsky Rosen Paradox*. Physics Publishing Co. Physics Vol. 1, 3, 195-200 (1964).

Bennet, C.H., Brassard, G., dkk. *Teleporting an Unknown Quantum State Via Dual Clasical and Einstein-Podolsky-Rosen Chanel*. Phys. Rev. Lett. 70, 1895 (1993)

Briegel, Hans J. dan Raussendorf, Robert. *Persistent Entanglement in Arrays of Interacting Particles*. Phys. Rev. Lett. 86, 3 (2001)

Einstein, A., Podolsky, B., and Rosen, N. *Can Quantum Mechanical Description of Physics Reality Be Considered Complate?*. Phys. Rev. Lett. 47, 777 (1935)

Gorbachev, V.N. dan Trubilko, A.I. *Quantum teleportation of an Einstein-Podolsky-Rosen Pair Using an Entangled Three-Particle State*. Journal of Experimental and Theoretical Physics 91, 5, 894-898 (2000)

Karlsson, A. dan Bourennane, M. *Quantum teleportation using three-particle entanglement*. Phys. Rev. 58, 6 (1998)

Linden, N. dan Popescu, S. *On multi-particle entanglement*. arXiv:quant-ph/9711016v1 (1997)

Nakahara, Mikio. dan Ohmi, Tetsuo. 2008. *Quantum Computing from Linear Algebra to Physical Realizations*. CRC Press Taylor & Francis Grup, USA.

Purwanto, A. 2014. *Diktat Mekanika Kuantum*. ITS, Surabaya.

Rahayu, Irasani. 2017. *Teleportasi Kuantum Informasi Dua Qubit Melalui Keadaan Terbelit Tiga Qubit*. ITS, Surabaya.

Tan, Xiaoqing, dkk. *Perfect quantum teleportation by four-particle cluster state*. Information Processing Letter 116, 347-350 (2016)

Tang, dkk. *General Greenberger-Horne-Zeilinger theorem of cluster states*. arXiv:0812.4915v1 (2008)

" halaman ini sengaja dikosongkan "

LAMPIRAN A

A.1. Pengukuran teleportasi satu qubit sembarang melalui keadaan gugus empat qubit dengan basis $\left|\varphi_1\right\rangle_{a123}$

$$\left(\left\langle\varphi_1\right|_{a123}\otimes I\right)\left|\Phi_1\right\rangle_{a1234}=$$

$$\left(\frac{1}{2}\left[\left\langle 0000\right|+\left\langle 0110\right|+\left\langle 1001\right|-\left\langle 1111\right|\right]_{a123}\otimes I\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}\left(\alpha\left|00000\right\rangle_{a1234}+\alpha\left|00011\right\rangle_{a1234}+\alpha\left|01100\right\rangle_{a1234}\right.\right.$$

$$-\alpha\left|01111\right\rangle_{a1234}+\beta\left|10000\right\rangle_{a1234}+\beta\left|10011\right\rangle_{a1234}$$

$$\left.\left.+\beta\left|11100\right\rangle_{a1234}-\beta\left|11111\right\rangle_{a1234}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left[\alpha\left(\left\langle 0000\right|+\left\langle 0110\right|+\left\langle 1001\right|-\left\langle 1111\right|\right)_{a123}\left|0000\right\rangle_{a123}\otimes\left|0\right\rangle_4\right.$$

$$+\alpha\left(\left\langle 0000\right|+\left\langle 0110\right|+\left\langle 1001\right|-\left\langle 1111\right|\right)_{a123}\left|0001\right\rangle_{a123}\otimes\left|1\right\rangle_4$$

$$+\alpha\left(\left\langle 0000\right|+\left\langle 0110\right|+\left\langle 1001\right|-\left\langle 1111\right|\right)_{a123}\left|0110\right\rangle_{a123}\otimes\left|0\right\rangle_4$$

$$-\alpha\left(\left\langle 0000\right|+\left\langle 0110\right|+\left\langle 1001\right|-\left\langle 1111\right|\right)_{a123}\left|0111\right\rangle_{a123}\otimes\left|1\right\rangle_4$$

$$+\beta\left(\left\langle 0000\right|+\left\langle 0110\right|+\left\langle 1001\right|-\left\langle 1111\right|\right)_{a123}\left|1000\right\rangle_{a123}\otimes\left|0\right\rangle_4$$

$$+\beta\left(\left\langle 0000\right|+\left\langle 0110\right|+\left\langle 1001\right|-\left\langle 1111\right|\right)_{a123}\left|1001\right\rangle_{a123}\otimes\left|1\right\rangle_4$$

$$+\beta\left(\left\langle 0000\right|+\left\langle 0110\right|+\left\langle 1001\right|-\left\langle 1111\right|\right)_{a123}\left|1110\right\rangle_{a123}\otimes\left|0\right\rangle_4$$

$$\left.-\beta\left(\left\langle 0000\right|+\left\langle 0110\right|+\left\langle 1001\right|-\left\langle 1111\right|\right)_{a123}\left|1111\right\rangle_{a123}\otimes\left|1\right\rangle_4\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\alpha\left|0\right\rangle_4+\beta\left|1\right\rangle_4\right]$$

Sehingga agar Bob menerima keadaan yang sama dengan keadaan yang dikirim oleh Alice, Bob harus melakukan operator rotasi $2I$ dari kiri.

$$(2I)\left(\langle\varphi_1|_{ab14}\otimes I\right)|\Phi_1\rangle_{ab1234}=(2I)\frac{1}{2}\left[\alpha|0\rangle_4+\beta|1\rangle_4\right]$$
$$=\alpha|0\rangle_4+\beta|1\rangle_4$$

A.2. Pengukuran teleportasi satu qubit sembarang melalui keadaan gugus empat qubit dengan basis $|\varphi_2\rangle_{a123}$

$$\left(\langle\varphi_2|_{a123}\otimes I\right)|\Phi_1\rangle_{a1234}=$$
$$\left(\frac{1}{2}\left[\langle 0000|+\langle 0110|-\langle 1001|+\langle 1111|\right]_{a123}\otimes I\right)$$
$$\left(\frac{1}{2}\left(\alpha|00000\rangle_{a1234}+\alpha|00011\rangle_{a1234}+\alpha|01100\rangle_{a1234}\right.\right.$$
$$-\alpha|01111\rangle_{a1234}+\beta|10000\rangle_{a1234}+\beta|10011\rangle_{a1234}$$
$$\left.\left.+\beta|11100\rangle_{a1234}-\beta|11111\rangle_{a1234}\right)\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left[\alpha\left(\langle 0000|+\langle 0110|-\langle 1001|+\langle 1111|\right)_{a123}|0000\rangle_{a123}\otimes|0\rangle_4\right.$$
$$+\alpha\left(\langle 0000|+\langle 0110|-\langle 1001|+\langle 1111|\right)_{a123}|0001\rangle_{a123}\otimes|1\rangle_4$$
$$+\alpha\left(\langle 0000|+\langle 0110|-\langle 1001|+\langle 1111|\right)_{a123}|0110\rangle_{a123}\otimes|0\rangle_4$$
$$-\alpha\left(\langle 0000|+\langle 0110|-\langle 1001|+\langle 1111|\right)_{a123}|0111\rangle_{a123}\otimes|1\rangle_4$$

$$+\beta\left(\langle 0000|+\langle 0110|-\langle 1001|+\langle 1111|\right)_{a123}|1000\rangle_{a123}\otimes|0\rangle_4$$
$$+\beta\left(\langle 0000|+\langle 0110|-\langle 1001|+\langle 1111|\right)_{a123}|1001\rangle_{a123}\otimes|1\rangle_4$$
$$+\beta\left(\langle 0000|+\langle 0110|-\langle 1001|+\langle 1111|\right)_{a123}|1110\rangle_{a123}\otimes|0\rangle_4$$
$$-\beta\left(\langle 0000|+\langle 0110|-\langle 1001|+\langle 1111|\right)_{a123}|1111\rangle_{a123}\otimes|1\rangle_4\Big]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\alpha|0\rangle_4-\beta|1\rangle_4\right]$$

Sehingga agar Bob menerima keadaan yang sama dengan keadaan yang dikirim oleh Alice, Bob harus melakukan operator rotasi $2\sigma_Z$ dari kiri.

$$\left(2\sigma_Z\right)\left(\langle\varphi_2|_{ab14}\otimes I\right)|\Phi_1\rangle_{ab1234}=\left(2\sigma_Z\right)\frac{1}{2}\left[\alpha|0\rangle_4-\beta|1\rangle_4\right]$$
$$=\alpha|0\rangle_4+\beta|1\rangle_4$$

A.3. Pengukuran teleportasi satu qubit sembarang melalui keadaan gugus empat qubit dengan basis $|\varphi_3\rangle_{a123}$

$$\left(\langle\varphi_3|_{a123}\otimes I\right)|\Phi_1\rangle_{a1234}=$$
$$\left(\frac{1}{2}\left[\langle 0001|-\langle 0111|+\langle 1000|+\langle 1110|\right]_{a123}\otimes I\right)$$
$$\left(\frac{1}{2}\left(\alpha|00000\rangle_{a1234}+\alpha|00011\rangle_{a1234}+\alpha|01100\rangle_{a1234}\right.\right.$$
$$-\alpha|01111\rangle_{a1234}+\beta|10000\rangle_{a1234}+\beta|10011\rangle_{a1234}$$
$$\left.\left.+\beta|11100\rangle_{a1234}-\beta|11111\rangle_{a1234}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{4}\Big[\alpha\big(\langle 0001| - \langle 0111| + \langle 1000| + \langle 1110|\big)_{a123}|0000\rangle_{a123}\otimes|0\rangle_4$$
$$+\alpha\big(\langle 0001| - \langle 0111| + \langle 1000| + \langle 1110|\big)_{a123}|0001\rangle_{a123}\otimes|1\rangle_4$$
$$+\alpha\big(\langle 0001| - \langle 0111| + \langle 1000| + \langle 1110|\big)_{a123}|0110\rangle_{a123}\otimes|0\rangle_4$$
$$-\alpha\big(\langle 0001| - \langle 0111| + \langle 1000| + \langle 1110|\big)_{a123}|0111\rangle_{a123}\otimes|1\rangle_4$$
$$+\beta\big(\langle 0001| - \langle 0111| + \langle 1000| + \langle 1110|\big)_{a123}|1000\rangle_{a123}\otimes|0\rangle_4$$
$$+\beta\big(\langle 0001| - \langle 0111| + \langle 1000| + \langle 1110|\big)_{a123}|1001\rangle_{a123}\otimes|1\rangle_4$$
$$+\beta\big(\langle 0001| - \langle 0111| + \langle 1000| + \langle 1110|\big)_{a123}|1110\rangle_{a123}\otimes|0\rangle_4$$
$$-\beta\big(\langle 0001| - \langle 0111| + \langle 1000| + \langle 1110|\big)_{a123}|1111\rangle_{a123}\otimes|1\rangle_4\Big]$$
$$=\frac{1}{2}\Big[\alpha|1\rangle_4+\beta|0\rangle_4\Big]$$

Sehingga agar Bob menerima keadaan yang sama dengan keadaan yang dikirim oleh Alice, Bob harus melakukan operator rotasi $2\sigma_X$ dari kiri.

$$\begin{aligned}(2\sigma_X)\big(\langle\varphi_3|_{ab14}\otimes I\big)|\Phi_1\rangle_{ab1234} &= (2\sigma_X)\frac{1}{2}\Big[\alpha|1\rangle_4+\beta|0\rangle_4\Big] \\ &= \alpha|0\rangle_4+\beta|1\rangle_4\end{aligned}$$

A.4. Pengukuran teleportasi satu qubit sembarang melalui keadaan gugus empat qubit dengan basis $\left|\varphi_4\right\rangle_{a123}$

$$\left(\left\langle\varphi_4\right|_{a123}\otimes I\right)\left|\Phi_1\right\rangle_{a1234} =$$

$$\left(\frac{1}{2}\left[\left\langle 0001\right|-\left\langle 0111\right|-\left\langle 1000\right|-\left\langle 1110\right|\right]_{a123}\otimes I\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}\left(\alpha\left|00000\right\rangle_{a1234}+\alpha\left|00011\right\rangle_{a1234}+\alpha\left|01100\right\rangle_{a1234}\right.\right.$$

$$-\alpha\left|01111\right\rangle_{a1234}+\beta\left|10000\right\rangle_{a1234}+\beta\left|10011\right\rangle_{a1234}$$

$$\left.\left.+\beta\left|11100\right\rangle_{a1234}-\beta\left|11111\right\rangle_{a1234}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left[\alpha\left(\left\langle 0001\right|-\left\langle 0111\right|-\left\langle 1000\right|-\left\langle 1110\right|\right)_{a123}\left|0000\right\rangle_{a123}\otimes\left|0\right\rangle_4\right.$$

$$+\alpha\left(\left\langle 0001\right|-\left\langle 0111\right|-\left\langle 1000\right|-\left\langle 1110\right|\right)_{a123}\left|0001\right\rangle_{a123}\otimes\left|1\right\rangle_4$$

$$+\alpha\left(\left\langle 0001\right|-\left\langle 0111\right|-\left\langle 1000\right|-\left\langle 1110\right|\right)_{a123}\left|0110\right\rangle_{a123}\otimes\left|0\right\rangle_4$$

$$-\alpha\left(\left\langle 0001\right|-\left\langle 0111\right|-\left\langle 1000\right|-\left\langle 1110\right|\right)_{a123}\left|0111\right\rangle_{a123}\otimes\left|1\right\rangle_4$$

$$+\beta\left(\left\langle 0001\right|-\left\langle 0111\right|-\left\langle 1000\right|-\left\langle 1110\right|\right)_{a123}\left|1000\right\rangle_{a123}\otimes\left|0\right\rangle_4$$

$$+\beta\left(\left\langle 0001\right|-\left\langle 0111\right|-\left\langle 1000\right|-\left\langle 1110\right|\right)_{a123}\left|1001\right\rangle_{a123}\otimes\left|1\right\rangle_4$$

$$+\beta\left(\left\langle 0001\right|-\left\langle 0111\right|-\left\langle 1000\right|-\left\langle 1110\right|\right)_{a123}\left|1110\right\rangle_{a123}\otimes\left|0\right\rangle_4$$

$$\left.-\beta\left(\left\langle 0001\right|-\left\langle 0111\right|-\left\langle 1000\right|-\left\langle 1110\right|\right)_{a123}\left|1111\right\rangle_{a123}\otimes\left|1\right\rangle_4\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\alpha\left|1\right\rangle_4-\beta\left|0\right\rangle_4\right]$$

Sehingga agar Bob menerima keadaan yang sama dengan keadaan yang dikirim oleh Alice, Bob harus melakukan operator rotasi $2i\sigma_Y$ dari kiri.

$$\begin{aligned}(2i\sigma_Y)\left(\langle\varphi_4|_{ab14}\otimes I\right)|\Phi_1\rangle_{ab1234} &= (2i\sigma_Y)\frac{1}{2}\left[\alpha|1\rangle_4-\beta|0\rangle_4\right] \\ &= \alpha|0\rangle_4+\beta|1\rangle_4\end{aligned}$$

LAMPIRAN B

B.1. Pengukuran teleportasi dua qubit sembarang melalui keadaan gugus empat qubit dengan basis $\left|\phi_1\right\rangle_{ab14}$

$$\left(\left\langle\phi_1\right|_{ab14}\otimes I\right)\left|\Phi_2\right\rangle_{ab1234}=$$

$$\left(\frac{1}{2}\Big[\left\langle 0000\right|+\left\langle 0101\right|+\left\langle 1010\right|+\left\langle 1111\right|\Big]\otimes I\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}\Big[\alpha\left|000000\right\rangle+\alpha\left|000011\right\rangle+\alpha\left|001100\right\rangle-\alpha\left|001111\right\rangle\right.$$

$$+\beta\left|010000\right\rangle+\beta\left|010011\right\rangle+\beta\left|011100\right\rangle-\beta\left|011111\right\rangle$$

$$+\gamma\left|100000\right\rangle+\gamma\left|100011\right\rangle+\gamma\left|101100\right\rangle-\gamma\left|101111\right\rangle$$

$$\left.+\delta\left|110000\right\rangle+\delta\left|110011\right\rangle+\delta\left|111100\right\rangle-\delta\left|111111\right\rangle\Big]_{ab1234}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\Big[\alpha\left(\left\langle 0000\right|+\left\langle 0101\right|+\left\langle 1010\right|+\left\langle 1111\right|\right)_{ab14}\left|0000\right\rangle_{ab14}\otimes\left|00\right\rangle_{23}$$

$$+\alpha\left(\left\langle 0000\right|+\left\langle 0101\right|+\left\langle 1010\right|+\left\langle 1111\right|\right)_{ab14}\left|0001\right\rangle_{ab14}\otimes\left|01\right\rangle_{23}$$

$$+\alpha\left(\left\langle 0000\right|+\left\langle 0101\right|+\left\langle 1010\right|+\left\langle 1111\right|\right)_{ab14}\left|0010\right\rangle_{ab14}\otimes\left|10\right\rangle_{23}$$

$$-\alpha\left(\left\langle 0000\right|+\left\langle 0101\right|+\left\langle 1010\right|+\left\langle 1111\right|\right)_{ab14}\left|0011\right\rangle_{ab14}\otimes\left|11\right\rangle_{23}$$

$$+\beta\left(\left\langle 0000\right|+\left\langle 0101\right|+\left\langle 1010\right|+\left\langle 1111\right|\right)_{ab14}\left|0100\right\rangle_{ab14}\otimes\left|00\right\rangle_{23}$$

$$+\beta\left(\left\langle 0000\right|+\left\langle 0101\right|+\left\langle 1010\right|+\left\langle 1111\right|\right)_{ab14}\left|0101\right\rangle_{ab14}\otimes\left|01\right\rangle_{23}$$

$$+\beta\left(\left\langle 0000\right|+\left\langle 0101\right|+\left\langle 1010\right|+\left\langle 1111\right|\right)_{ab14}\left|0110\right\rangle_{ab14}\otimes\left|10\right\rangle_{23}$$

$$-\beta\left(\left\langle 0000\right|+\left\langle 0101\right|+\left\langle 1010\right|+\left\langle 1111\right|\right)_{ab14}\left|0111\right\rangle_{ab14}\otimes\left|11\right\rangle_{23}$$

$$+\gamma\left(\langle 0000| + \langle 0101| + \langle 1010| + \langle 1111|\right)_{ab14} |1000\rangle_{ab14} \otimes |00\rangle_{23}$$
$$+\gamma\left(\langle 0000| + \langle 0101| + \langle 1010| + \langle 1111|\right)_{ab14} |1001\rangle_{ab14} \otimes |01\rangle_{23}$$
$$+\gamma\left(\langle 0000| + \langle 0101| + \langle 1010| + \langle 1111|\right)_{ab14} |1010\rangle_{ab14} \otimes |10\rangle_{23}$$
$$-\gamma\left(\langle 0000| + \langle 0101| + \langle 1010| + \langle 1111|\right)_{ab14} |1011\rangle_{ab14} \otimes |11\rangle_{23}$$
$$+\delta\left(\langle 0000| + \langle 0101| + \langle 1010| + \langle 1111|\right)_{ab14} |1100\rangle_{ab14} \otimes |00\rangle_{23}$$
$$+\delta\left(\langle 0000| + \langle 0101| + \langle 1010| + \langle 1111|\right)_{ab14} |1101\rangle_{ab14} \otimes |01\rangle_{23}$$
$$+\delta\left(\langle 0000| + \langle 0101| + \langle 1010| + \langle 1111|\right)_{ab14} |1110\rangle_{ab14} \otimes |10\rangle_{23}$$
$$-\delta\left(\langle 0000| + \langle 0101| + \langle 1010| + \langle 1111|\right)_{ab14} |1111\rangle_{ab14} \otimes |11\rangle_{23} \Big]$$
$$= \frac{1}{4}\left[\alpha|00\rangle_{23} + \beta|01\rangle_{23} + \gamma|10\rangle_{23} + \delta|11\rangle_{23}\right]$$

Sehingga agar Bob menerima keadaan yang sama dengan keadaan yang dikirim oleh Alice, Bob harus melakukan operator rotasi $2I \otimes 2I$ dari kiri.

$$2I \otimes 2I\left(\langle \phi_1|_{ab14} \otimes I\right)|\Phi_2\rangle_{ab1234}$$
$$= 2I \otimes 2I\,\frac{1}{4}\left[\alpha|00\rangle_{23} + \beta|01\rangle_{23} + \gamma|10\rangle_{23} + \delta|11\rangle_{23}\right]$$
$$= \alpha|00\rangle_{23} + \beta|01\rangle_{23} + \gamma|10\rangle_{23} + \delta|11\rangle_{23}$$

B.2. Pengukuran teleportasi dua qubit sembarang melalui keadaan gugus empat qubit dengan basis $\left|\phi_2\right\rangle_{ab14}$

$$\left(\left\langle\phi_2\right|_{ab14}\otimes I\right)\left|\Phi_2\right\rangle_{ab1234}=$$

$$\left(\frac{1}{2}\left[\langle 0000|-\langle 0101|-\langle 1010|-\langle 1111|\right]\otimes I\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}\left[\alpha|000000\rangle+\alpha|000011\rangle+\alpha|001100\rangle-\alpha|001111\rangle\right.\right.$$
$$+\beta|010000\rangle+\beta|010011\rangle+\beta|011100\rangle-\beta|011111\rangle$$
$$+\gamma|100000\rangle+\gamma|100011\rangle+\gamma|101100\rangle-\gamma|101111\rangle$$
$$\left.\left.+\delta|110000\rangle+\delta|110011\rangle+\delta|111100\rangle-\delta|111111\rangle\right]_{ab1234}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left[\alpha\left(\langle 0000|-\langle 0101|-\langle 1010|-\langle 1111|\right)_{ab14}|0000\rangle_{ab14}\otimes|00\rangle_{23}\right.$$
$$+\alpha\left(\langle 0000|-\langle 0101|-\langle 1010|-\langle 1111|\right)_{ab14}|0001\rangle_{ab14}\otimes|01\rangle_{23}$$
$$+\alpha\left(\langle 0000|-\langle 0101|-\langle 1010|-\langle 1111|\right)_{ab14}|0010\rangle_{ab14}\otimes|10\rangle_{23}$$
$$-\alpha\left(\langle 0000|-\langle 0101|-\langle 1010|-\langle 1111|\right)_{ab14}|0011\rangle_{ab14}\otimes|11\rangle_{23}$$
$$+\beta\left(\langle 0000|-\langle 0101|-\langle 1010|-\langle 1111|\right)_{ab14}|0100\rangle_{ab14}\otimes|00\rangle_{23}$$
$$+\beta\left(\langle 0000|-\langle 0101|-\langle 1010|-\langle 1111|\right)_{ab14}|0101\rangle_{ab14}\otimes|01\rangle_{23}$$
$$+\beta\left(\langle 0000|-\langle 0101|-\langle 1010|-\langle 1111|\right)_{ab14}|0110\rangle_{ab14}\otimes|10\rangle_{23}$$
$$-\beta\left(\langle 0000|-\langle 0101|-\langle 1010|-\langle 1111|\right)_{ab14}|0111\rangle_{ab14}\otimes|11\rangle_{23}$$

$$+\gamma\left(\langle 0000|-\langle 0101|-\langle 1010|-\langle 1111|\right)_{ab14}|1000\rangle_{ab14}\otimes|00\rangle_{23}$$
$$+\gamma\left(\langle 0000|-\langle 0101|-\langle 1010|-\langle 1111|\right)_{ab14}|1001\rangle_{ab14}\otimes|01\rangle_{23}$$
$$+\gamma\left(\langle 0000|-\langle 0101|-\langle 1010|-\langle 1111|\right)_{ab14}|1010\rangle_{ab14}\otimes|10\rangle_{23}$$
$$-\gamma\left(\langle 0000|-\langle 0101|-\langle 1010|-\langle 1111|\right)_{ab14}|1011\rangle_{ab14}\otimes|11\rangle_{23}$$
$$+\delta\left(\langle 0000|-\langle 0101|-\langle 1010|-\langle 1111|\right)_{ab14}|1100\rangle_{ab14}\otimes|00\rangle_{23}$$
$$+\delta\left(\langle 0000|-\langle 0101|-\langle 1010|-\langle 1111|\right)_{ab14}|1101\rangle_{ab14}\otimes|01\rangle_{23}$$
$$+\delta\left(\langle 0000|-\langle 0101|-\langle 1010|-\langle 1111|\right)_{ab14}|1110\rangle_{ab14}\otimes|10\rangle_{23}$$
$$-\delta\left(\langle 0000|-\langle 0101|-\langle 1010|-\langle 1111|\right)_{ab14}|1111\rangle_{ab14}\otimes|11\rangle_{23}\Big]$$
$$=\frac{1}{4}\left[\alpha|00\rangle_{23}-\beta|01\rangle_{23}-\gamma|10\rangle_{23}+\delta|11\rangle_{23}\right]$$

Sehingga agar Bob menerima keadaan yang sama dengan keadaan yang dikirim oleh Alice, Bob harus melakukan operator rotasi $2\sigma_z\otimes 2\sigma_z$ dari kiri.

$$2\sigma_z\otimes 2\sigma_z\left(\langle\phi_2|_{ab14}\otimes I\right)|\Phi_2\rangle$$
$$=2\sigma_z\otimes 2\sigma_z\frac{1}{4}\left[\alpha|00\rangle_{23}-\beta|01\rangle_{23}-\gamma|10\rangle_{23}+\delta|11\rangle_{23}\right]$$
$$=\alpha|00\rangle_{23}+\beta|01\rangle_{23}+\gamma|10\rangle_{23}+\delta|11\rangle_{23}$$

B.3. Pengukuran teleportasi dua qubit sembarang melalui keadaan gugus empat qubit dengan basis $\left|\phi_3\right\rangle_{ab14}$

$$\left(\left\langle\phi_3\right|_{ab14}\otimes I\right)\left|\Phi_2\right\rangle_{ab1234}=$$

$$\left(\frac{1}{2}\left[\left\langle 0000\right|-\left\langle 0101\right|+\left\langle 1010\right|+\left\langle 1111\right|\right]\otimes I\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}\left[\alpha\left|000000\right\rangle+\alpha\left|000011\right\rangle+\alpha\left|001100\right\rangle-\alpha\left|001111\right\rangle\right.\right.$$

$$+\beta\left|010000\right\rangle+\beta\left|010011\right\rangle+\beta\left|011100\right\rangle-\beta\left|011111\right\rangle$$

$$+\gamma\left|100000\right\rangle+\gamma\left|100011\right\rangle+\gamma\left|101100\right\rangle-\gamma\left|101111\right\rangle$$

$$\left.\left.+\delta\left|110000\right\rangle+\delta\left|110011\right\rangle+\delta\left|111100\right\rangle-\delta\left|111111\right\rangle\right]_{ab1234}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left[\alpha\left(\left\langle 0000\right|-\left\langle 0101\right|+\left\langle 1010\right|+\left\langle 1111\right|\right)_{ab14}\left|0000\right\rangle_{ab14}\otimes\left|00\right\rangle_{23}\right.$$

$$+\alpha\left(\left\langle 0000\right|-\left\langle 0101\right|+\left\langle 1010\right|+\left\langle 1111\right|\right)_{ab14}\left|0001\right\rangle_{ab14}\otimes\left|01\right\rangle_{23}$$

$$+\alpha\left(\left\langle 0000\right|-\left\langle 0101\right|+\left\langle 1010\right|+\left\langle 1111\right|\right)_{ab14}\left|0010\right\rangle_{ab14}\otimes\left|10\right\rangle_{23}$$

$$-\alpha\left(\left\langle 0000\right|-\left\langle 0101\right|+\left\langle 1010\right|+\left\langle 1111\right|\right)_{ab14}\left|0011\right\rangle_{ab14}\otimes\left|11\right\rangle_{23}$$

$$+\beta\left(\left\langle 0000\right|-\left\langle 0101\right|+\left\langle 1010\right|+\left\langle 1111\right|\right)_{ab14}\left|0100\right\rangle_{ab14}\otimes\left|00\right\rangle_{23}$$

$$+\beta\left(\left\langle 0000\right|-\left\langle 0101\right|+\left\langle 1010\right|+\left\langle 1111\right|\right)_{ab14}\left|0101\right\rangle_{ab14}\otimes\left|01\right\rangle_{23}$$

$$+\beta\left(\left\langle 0000\right|-\left\langle 0101\right|+\left\langle 1010\right|+\left\langle 1111\right|\right)_{ab14}\left|0110\right\rangle_{ab14}\otimes\left|10\right\rangle_{23}$$

$$-\beta\left(\left\langle 0000\right|-\left\langle 0101\right|+\left\langle 1010\right|+\left\langle 1111\right|\right)_{ab14}\left|0111\right\rangle_{ab14}\otimes\left|11\right\rangle_{23}$$

$$+\gamma\left(\langle 0000| - \langle 0101| + \langle 1010| + \langle 1111|\right)_{ab14} |1000\rangle_{ab14} \otimes |00\rangle_{23}$$
$$+\gamma\left(\langle 0000| - \langle 0101| + \langle 1010| + \langle 1111|\right)_{ab14} |1001\rangle_{ab14} \otimes |01\rangle_{23}$$
$$+\gamma\left(\langle 0000| - \langle 0101| + \langle 1010| + \langle 1111|\right)_{ab14} |1010\rangle_{ab14} \otimes |10\rangle_{23}$$
$$-\gamma\left(\langle 0000| - \langle 0101| + \langle 1010| + \langle 1111|\right)_{ab14} |1011\rangle_{ab14} \otimes |11\rangle_{23}$$
$$+\delta\left(\langle 0000| - \langle 0101| + \langle 1010| + \langle 1111|\right)_{ab14} |1100\rangle_{ab14} \otimes |00\rangle_{23}$$
$$+\delta\left(\langle 0000| - \langle 0101| + \langle 1010| + \langle 1111|\right)_{ab14} |1101\rangle_{ab14} \otimes |01\rangle_{23}$$
$$+\delta\left(\langle 0000| - \langle 0101| + \langle 1010| + \langle 1111|\right)_{ab14} |1110\rangle_{ab14} \otimes |10\rangle_{23}$$
$$-\delta\left(\langle 0000| - \langle 0101| + \langle 1010| + \langle 1111|\right)_{ab14} |1111\rangle_{ab14} \otimes |11\rangle_{23} \Big]$$
$$= \frac{1}{4}\left[\alpha|00\rangle_{23} - \beta|01\rangle_{23} + \gamma|10\rangle_{23} - \delta|11\rangle_{23}\right]$$

Sehingga agar Bob menerima keadaan yang sama dengan keadaan yang dikirim oleh Alice, Bob harus melakukan operator rotasi $2I \otimes 2\sigma_z$ dari kiri

$$2I \otimes 2\sigma_z \left(\langle \phi_3|_{ab14} \otimes I\right)|\Phi_2\rangle_{ab1234}$$
$$= 2I \otimes 2\sigma_z \frac{1}{4}\left[\alpha|00\rangle_{23} - \beta|01\rangle_{23} + \gamma|10\rangle_{23} - \delta|11\rangle_{23}\right]$$
$$= \alpha|00\rangle_{23} + \beta|01\rangle_{23} + \gamma|10\rangle_{23} + \delta|11\rangle_{23}$$

B.4. Pengukuran teleportasi dua qubit sembarang melalui keadaan gugus empat qubit dengan basis $\left|\phi_4\right\rangle_{ab14}$

$$\left(\left\langle\phi_4\right|_{ab14}\otimes I\right)\left|\Phi_2\right\rangle_{ab1234}=$$

$$\left(\frac{1}{2}\left[\left\langle 0000\right|+\left\langle 0101\right|-\left\langle 1010\right|+\left\langle 1111\right|\right]\otimes I\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}\left[\alpha\left|000000\right\rangle+\alpha\left|000011\right\rangle+\alpha\left|001100\right\rangle-\alpha\left|001111\right\rangle\right.\right.$$
$$+\beta\left|010000\right\rangle+\beta\left|010011\right\rangle+\beta\left|011100\right\rangle-\beta\left|011111\right\rangle$$
$$+\gamma\left|100000\right\rangle+\gamma\left|100011\right\rangle+\gamma\left|101100\right\rangle-\gamma\left|101111\right\rangle$$
$$\left.\left.+\delta\left|110000\right\rangle+\delta\left|110011\right\rangle+\delta\left|111100\right\rangle-\delta\left|111111\right\rangle\right]_{ab1234}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left[\alpha\left(\left\langle 0000\right|+\left\langle 0101\right|-\left\langle 1010\right|+\left\langle 1111\right|\right)_{ab14}\left|0000\right\rangle_{ab14}\otimes\left|00\right\rangle_{23}\right.$$
$$+\alpha\left(\left\langle 0000\right|+\left\langle 0101\right|-\left\langle 1010\right|+\left\langle 1111\right|\right)_{ab14}\left|0001\right\rangle_{ab14}\otimes\left|01\right\rangle_{23}$$
$$+\alpha\left(\left\langle 0000\right|+\left\langle 0101\right|-\left\langle 1010\right|+\left\langle 1111\right|\right)_{ab14}\left|0010\right\rangle_{ab14}\otimes\left|10\right\rangle_{23}$$
$$-\alpha\left(\left\langle 0000\right|+\left\langle 0101\right|-\left\langle 1010\right|+\left\langle 1111\right|\right)_{ab14}\left|0011\right\rangle_{ab14}\otimes\left|11\right\rangle_{23}$$
$$+\beta\left(\left\langle 0000\right|+\left\langle 0101\right|-\left\langle 1010\right|+\left\langle 1111\right|\right)_{ab14}\left|0100\right\rangle_{ab14}\otimes\left|00\right\rangle_{23}$$
$$+\beta\left(\left\langle 0000\right|+\left\langle 0101\right|-\left\langle 1010\right|+\left\langle 1111\right|\right)_{ab14}\left|0101\right\rangle_{ab14}\otimes\left|01\right\rangle_{23}$$
$$+\beta\left(\left\langle 0000\right|+\left\langle 0101\right|-\left\langle 1010\right|+\left\langle 1111\right|\right)_{ab14}\left|0110\right\rangle_{ab14}\otimes\left|10\right\rangle_{23}$$
$$-\beta\left(\left\langle 0000\right|+\left\langle 0101\right|-\left\langle 1010\right|+\left\langle 1111\right|\right)_{ab14}\left|0111\right\rangle_{ab14}\otimes\left|11\right\rangle_{23}$$

$$+\gamma\left(\langle 0000|+\langle 0101|-\langle 1010|+\langle 1111|\right)_{ab14}|1000\rangle_{ab14}\otimes|00\rangle_{23}$$
$$+\gamma\left(\langle 0000|+\langle 0101|-\langle 1010|+\langle 1111|\right)_{ab14}|1001\rangle_{ab14}\otimes|01\rangle_{23}$$
$$+\gamma\left(\langle 0000|+\langle 0101|-\langle 1010|+\langle 1111|\right)_{ab14}|1010\rangle_{ab14}\otimes|10\rangle_{23}$$
$$-\gamma\left(\langle 0000|+\langle 0101|-\langle 1010|+\langle 1111|\right)_{ab14}|1011\rangle_{ab14}\otimes|11\rangle_{23}$$
$$+\delta\left(\langle 0000|+\langle 0101|-\langle 1010|+\langle 1111|\right)_{ab14}|1100\rangle_{ab14}\otimes|00\rangle_{23}$$
$$+\delta\left(\langle 0000|+\langle 0101|-\langle 1010|+\langle 1111|\right)_{ab14}|1101\rangle_{ab14}\otimes|01\rangle_{23}$$
$$+\delta\left(\langle 0000|+\langle 0101|-\langle 1010|+\langle 1111|\right)_{ab14}|1110\rangle_{ab14}\otimes|10\rangle_{23}$$
$$-\delta\left(\langle 0000|+\langle 0101|-\langle 1010|+\langle 1111|\right)_{ab14}|1111\rangle_{ab14}\otimes|11\rangle_{23}\Big]$$
$$=\frac{1}{4}\left[\alpha|00\rangle_{23}+\beta|01\rangle_{23}-\gamma|10\rangle_{23}-\delta|11\rangle_{23}\right]$$

Sehingga agar Bob menerima keadaan yang sama dengan keadaan yang dikirim oleh Alice, Bob harus melakukan operator rotasi $2\sigma_z\otimes 2I$ dari kiri.

$$2\sigma_z\otimes 2I\left(\langle\phi_4|_{ab14}\otimes I\right)|\Phi_2\rangle_{ab1234}$$
$$=2\sigma_z\otimes 2I\,\frac{1}{4}\left[\alpha|00\rangle_{23}+\beta|01\rangle_{23}-\gamma|10\rangle_{23}-\delta|11\rangle_{23}\right]$$
$$=\alpha|00\rangle_{23}+\beta|01\rangle_{23}+\gamma|10\rangle_{23}+\delta|11\rangle_{23}$$

B.5. Pengukuran teleportasi dua qubit sembarang melalui keadaan gugus empat qubit dengan basis $\left|\phi_5\right\rangle_{ab14}$

$$\left(\left\langle\phi_5\right|_{ab14} \otimes I\right)\left|\Phi_2\right\rangle_{ab1234} =$$

$$\left(\frac{1}{2}\left[\left\langle 0001\right| + \left\langle 0100\right| - \left\langle 1011\right| + \left\langle 1110\right|\right] \otimes I\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}\left[\alpha\left|000000\right\rangle + \alpha\left|000011\right\rangle + \alpha\left|001100\right\rangle - \alpha\left|001111\right\rangle\right.\right.$$

$$+\beta\left|010000\right\rangle + \beta\left|010011\right\rangle + \beta\left|011100\right\rangle - \beta\left|011111\right\rangle$$

$$+\gamma\left|100000\right\rangle + \gamma\left|100011\right\rangle + \gamma\left|101100\right\rangle - \gamma\left|101111\right\rangle$$

$$\left.\left.+\delta\left|110000\right\rangle + \delta\left|110011\right\rangle + \delta\left|111100\right\rangle - \delta\left|111111\right\rangle\right]_{ab1234}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left[\alpha\left(\left\langle 0001\right| + \left\langle 0100\right| - \left\langle 1011\right| + \left\langle 1110\right|\right)_{ab14}\left|0000\right\rangle_{ab14} \otimes \left|00\right\rangle_{23}\right.$$

$$+\alpha\left(\left\langle 0001\right| + \left\langle 0100\right| - \left\langle 1011\right| + \left\langle 1110\right|\right)_{ab14}\left|0001\right\rangle_{ab14} \otimes \left|01\right\rangle_{23}$$

$$+\alpha\left(\left\langle 0001\right| + \left\langle 0100\right| - \left\langle 1011\right| + \left\langle 1110\right|\right)_{ab14}\left|0010\right\rangle_{ab14} \otimes \left|10\right\rangle_{23}$$

$$-\alpha\left(\left\langle 0001\right| + \left\langle 0100\right| - \left\langle 1011\right| + \left\langle 1110\right|\right)_{ab14}\left|0011\right\rangle_{ab14} \otimes \left|11\right\rangle_{23}$$

$$+\beta\left(\left\langle 0001\right| + \left\langle 0100\right| - \left\langle 1011\right| + \left\langle 1110\right|\right)_{ab14}\left|0100\right\rangle_{ab14} \otimes \left|00\right\rangle_{23}$$

$$+\beta\left(\left\langle 0001\right| + \left\langle 0100\right| - \left\langle 1011\right| + \left\langle 1110\right|\right)_{ab14}\left|0101\right\rangle_{ab14} \otimes \left|01\right\rangle_{23}$$

$$+\beta\left(\left\langle 0001\right| + \left\langle 0100\right| - \left\langle 1011\right| + \left\langle 1110\right|\right)_{ab14}\left|0110\right\rangle_{ab14} \otimes \left|10\right\rangle_{23}$$

$$-\beta\left(\left\langle 0001\right| + \left\langle 0100\right| - \left\langle 1011\right| + \left\langle 1110\right|\right)_{ab14}\left|0111\right\rangle_{ab14} \otimes \left|11\right\rangle_{23}$$

$$+\gamma\left(\langle 0001| + \langle 0100| - \langle 1011| + \langle 1110|\right)_{ab14}|1000\rangle_{ab14} \otimes |00\rangle_{23}$$
$$+\gamma\left(\langle 0001| + \langle 0100| - \langle 1011| + \langle 1110|\right)_{ab14}|1001\rangle_{ab14} \otimes |01\rangle_{23}$$
$$+\gamma\left(\langle 0001| + \langle 0100| - \langle 1011| + \langle 1110|\right)_{ab14}|1010\rangle_{ab14} \otimes |10\rangle_{23}$$
$$-\gamma\left(\langle 0001| + \langle 0100| - \langle 1011| + \langle 1110|\right)_{ab14}|1011\rangle_{ab14} \otimes |11\rangle_{23}$$
$$+\delta\left(\langle 0001| + \langle 0100| - \langle 1011| + \langle 1110|\right)_{ab14}|1100\rangle_{ab14} \otimes |00\rangle_{23}$$
$$+\delta\left(\langle 0001| + \langle 0100| - \langle 1011| + \langle 1110|\right)_{ab14}|1101\rangle_{ab14} \otimes |01\rangle_{23}$$
$$+\delta\left(\langle 0001| + \langle 0100| - \langle 1011| + \langle 1110|\right)_{ab14}|1110\rangle_{ab14} \otimes |10\rangle_{23}$$
$$-\delta\left(\langle 0001| + \langle 0100| - \langle 1011| + \langle 1110|\right)_{ab14}|1111\rangle_{ab14} \otimes |11\rangle_{23}\Big]$$
$$= \frac{1}{4}\left[\alpha|01\rangle_{23} + \beta|00\rangle_{23} - \gamma|11\rangle_{23} - \delta|10\rangle_{23}\right]$$

Sehingga agar Bob menerima keadaan yang sama dengan keadaan yang dikirim oleh Alice, Bob harus melakukan operator rotasi $2I \otimes 2\sigma_x$ dari kiri

$$2I \otimes 2\sigma_x\left(\langle\phi_5|_{ab14} \otimes I\right)|\Phi_2\rangle_{ab1234}$$
$$= 2I \otimes 2\sigma_x \frac{1}{4}\left[\alpha|01\rangle_{23} + \beta|00\rangle_{23} - \gamma|11\rangle_{23} - \delta|10\rangle_{23}\right]\#$$
$$= \alpha|00\rangle_{23} + \beta|01\rangle_{23} + \gamma|10\rangle_{23} + \delta|11\rangle_{23}$$

B.6. Pengukuran teleportasi dua qubit sembarang melalui keadaan gugus empat qubit dengan basis $\left|\phi_6\right\rangle_{ab14}$

$$\left(\left\langle\phi_6\right|_{ab14}\otimes I\right)\left|\Phi_2\right\rangle_{ab1234}=$$

$$\left(\frac{1}{2}\left[\langle 0001|-\langle 0100|+\langle 1011|+\langle 1110|\right]\otimes I\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}\left[\alpha|000000\rangle+\alpha|000011\rangle+\alpha|001100\rangle-\alpha|001111\rangle\right.\right.$$
$$+\beta|010000\rangle+\beta|010011\rangle+\beta|011100\rangle-\beta|011111\rangle$$
$$+\gamma|100000\rangle+\gamma|100011\rangle+\gamma|101100\rangle-\gamma|101111\rangle$$
$$\left.\left.+\delta|110000\rangle+\delta|110011\rangle+\delta|111100\rangle-\delta|111111\rangle\right]_{ab1234}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left[\alpha\left(\langle 0001|-\langle 0100|+\langle 1011|+\langle 1110|\right)_{ab14}|0000\rangle_{ab14}\otimes|00\rangle_{23}\right.$$
$$+\alpha\left(\langle 0001|-\langle 0100|+\langle 1011|+\langle 1110|\right)_{ab14}|0001\rangle_{ab14}\otimes|01\rangle_{23}$$
$$+\alpha\left(\langle 0001|-\langle 0100|+\langle 1011|+\langle 1110|\right)_{ab14}|0010\rangle_{ab14}\otimes|10\rangle_{23}$$
$$-\alpha\left(\langle 0001|-\langle 0100|+\langle 1011|+\langle 1110|\right)_{ab14}|0011\rangle_{ab14}\otimes|11\rangle_{23}$$
$$+\beta\left(\langle 0001|-\langle 0100|+\langle 1011|+\langle 1110|\right)_{ab14}|0100\rangle_{ab14}\otimes|00\rangle_{23}$$
$$+\beta\left(\langle 0001|-\langle 0100|+\langle 1011|+\langle 1110|\right)_{ab14}|0101\rangle_{ab14}\otimes|01\rangle_{23}$$
$$+\beta\left(\langle 0001|-\langle 0100|+\langle 1011|+\langle 1110|\right)_{ab14}|0110\rangle_{ab14}\otimes|10\rangle_{23}$$
$$-\beta\left(\langle 0001|-\langle 0100|+\langle 1011|+\langle 1110|\right)_{ab14}|0111\rangle_{ab14}\otimes|11\rangle_{23}$$

$$+\gamma\left(\langle 0001| - \langle 0100| + \langle 1011| + \langle 1110|\right)_{ab14} |1000\rangle_{ab14} \otimes |00\rangle_{23}$$
$$+\gamma\left(\langle 0001| - \langle 0100| + \langle 1011| + \langle 1110|\right)_{ab14} |1001\rangle_{ab14} \otimes |01\rangle_{23}$$
$$+\gamma\left(\langle 0001| - \langle 0100| + \langle 1011| + \langle 1110|\right)_{ab14} |1010\rangle_{ab14} \otimes |10\rangle_{23}$$
$$-\gamma\left(\langle 0001| - \langle 0100| + \langle 1011| + \langle 1110|\right)_{ab14} |1011\rangle_{ab14} \otimes |11\rangle_{23}$$
$$+\delta\left(\langle 0001| - \langle 0100| + \langle 1011| + \langle 1110|\right)_{ab14} |1100\rangle_{ab14} \otimes |00\rangle_{23}$$
$$+\delta\left(\langle 0001| - \langle 0100| + \langle 1011| + \langle 1110|\right)_{ab14} |1101\rangle_{ab14} \otimes |01\rangle_{23}$$
$$+\delta\left(\langle 0001| - \langle 0100| + \langle 1011| + \langle 1110|\right)_{ab14} |1110\rangle_{ab14} \otimes |10\rangle_{23}$$
$$-\delta\left(\langle 0001| - \langle 0100| + \langle 1011| + \langle 1110|\right)_{ab14} |1111\rangle_{ab14} \otimes |11\rangle_{23} \Big]$$
$$= \frac{1}{4}\Big[\alpha|01\rangle_{23} - \beta|00\rangle_{23} - \gamma|11\rangle_{23} + \delta|10\rangle_{23}\Big]$$

Sehingga agar Bob menerima keadaan yang sama dengan keadaan yang dikirim oleh Alice, Bob harus melakukan operator rotasi $2\sigma_z \otimes 2i\sigma_y$ dari kiri.

$$2\sigma_z \otimes 2i\sigma_y \left(\langle \phi_6|_{ab14} \otimes I\right)|\Phi_2\rangle_{ab1234}$$
$$= 2\sigma_z \otimes 2i\sigma_y \frac{1}{4}\Big[\alpha|01\rangle_{23} - \beta|00\rangle_{23} - \gamma|11\rangle_{23} + \delta|10\rangle_{23}\Big] \#$$
$$= \alpha|00\rangle_{23} + \beta|01\rangle_{23} + \gamma|10\rangle_{23} + \delta|11\rangle_{23}$$

B.7. Pengukuran teleportasi dua qubit sembarang melalui keadaan gugus empat qubit dengan basis $\left|\phi_7\right\rangle_{ab14}$

$$\left(\left\langle\phi_7\right|_{ab14}\otimes I\right)\left|\Phi_2\right\rangle_{ab1234}=$$

$$\left(\frac{1}{2}\left[\left\langle 0001\right|-\left\langle 0100\right|-\left\langle 1011\right|-\left\langle 1110\right|\right]\otimes I\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}\left[\alpha\left|000000\right\rangle+\alpha\left|000011\right\rangle+\alpha\left|001100\right\rangle-\alpha\left|001111\right\rangle\right.\right.$$
$$+\beta\left|010000\right\rangle+\beta\left|010011\right\rangle+\beta\left|011100\right\rangle-\beta\left|011111\right\rangle$$
$$+\gamma\left|100000\right\rangle+\gamma\left|100011\right\rangle+\gamma\left|101100\right\rangle-\gamma\left|101111\right\rangle$$
$$\left.\left.+\delta\left|110000\right\rangle+\delta\left|110011\right\rangle+\delta\left|111100\right\rangle-\delta\left|111111\right\rangle\right]_{ab1234}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left[\alpha\left(\left\langle 0001\right|-\left\langle 0100\right|-\left\langle 1011\right|-\left\langle 1110\right|\right)_{ab14}\left|0000\right\rangle_{ab14}\otimes\left|00\right\rangle_{23}\right.$$
$$+\alpha\left(\left\langle 0001\right|-\left\langle 0100\right|-\left\langle 1011\right|-\left\langle 1110\right|\right)_{ab14}\left|0001\right\rangle_{ab14}\otimes\left|01\right\rangle_{23}$$
$$+\alpha\left(\left\langle 0001\right|-\left\langle 0100\right|-\left\langle 1011\right|-\left\langle 1110\right|\right)_{ab14}\left|0010\right\rangle_{ab14}\otimes\left|10\right\rangle_{23}$$
$$-\alpha\left(\left\langle 0001\right|-\left\langle 0100\right|-\left\langle 1011\right|-\left\langle 1110\right|\right)_{ab14}\left|0011\right\rangle_{ab14}\otimes\left|11\right\rangle_{23}$$
$$+\beta\left(\left\langle 0001\right|-\left\langle 0100\right|-\left\langle 1011\right|-\left\langle 1110\right|\right)_{ab14}\left|0100\right\rangle_{ab14}\otimes\left|00\right\rangle_{23}$$
$$+\beta\left(\left\langle 0001\right|-\left\langle 0100\right|-\left\langle 1011\right|-\left\langle 1110\right|\right)_{ab14}\left|0101\right\rangle_{ab14}\otimes\left|01\right\rangle_{23}$$
$$+\beta\left(\left\langle 0001\right|-\left\langle 0100\right|-\left\langle 1011\right|-\left\langle 1110\right|\right)_{ab14}\left|0110\right\rangle_{ab14}\otimes\left|10\right\rangle_{23}$$
$$-\beta\left(\left\langle 0001\right|-\left\langle 0100\right|-\left\langle 1011\right|-\left\langle 1110\right|\right)_{ab14}\left|0111\right\rangle_{ab14}\otimes\left|11\right\rangle_{23}$$

$$+\gamma\left(\langle 0001| - \langle 0100| - \langle 1011| - \langle 1110|\right)_{ab14} |1000\rangle_{ab14} \otimes |00\rangle_{23}$$
$$+\gamma\left(\langle 0001| - \langle 0100| - \langle 1011| - \langle 1110|\right)_{ab14} |1001\rangle_{ab14} \otimes |01\rangle_{23}$$
$$+\gamma\left(\langle 0001| - \langle 0100| - \langle 1011| - \langle 1110|\right)_{ab14} |1010\rangle_{ab14} \otimes |10\rangle_{23}$$
$$-\gamma\left(\langle 0001| - \langle 0100| - \langle 1011| - \langle 1110|\right)_{ab14} |1011\rangle_{ab14} \otimes |11\rangle_{23}$$
$$+\delta\left(\langle 0001| - \langle 0100| - \langle 1011| - \langle 1110|\right)_{ab14} |1100\rangle_{ab14} \otimes |00\rangle_{23}$$
$$+\delta\left(\langle 0001| - \langle 0100| - \langle 1011| - \langle 1110|\right)_{ab14} |1101\rangle_{ab14} \otimes |01\rangle_{23}$$
$$+\delta\left(\langle 0001| - \langle 0100| - \langle 1011| - \langle 1110|\right)_{ab14} |1110\rangle_{ab14} \otimes |10\rangle_{23}$$
$$-\delta\left(\langle 0001| - \langle 0100| - \langle 1011| - \langle 1110|\right)_{ab14} |1111\rangle_{ab14} \otimes |11\rangle_{23} \Big]$$
$$= \frac{1}{4}\Big[\alpha|01\rangle_{23} - \beta|00\rangle_{23} + \gamma|11\rangle_{23} - \delta|10\rangle_{23}\Big]$$

Sehingga agar Bob menerima keadaan yang sama dengan keadaan yang dikirim oleh Alice, Bob harus melakukan operator rotasi $2I \otimes 2i\sigma_y$ dari kiri.

$$2I \otimes 2i\sigma_y \left(\langle \phi_7|_{ab14} \otimes I\right)|\Phi_2\rangle_{ab1234}$$
$$= 2I \otimes 2i\sigma_y \frac{1}{4}\Big[\alpha|01\rangle_{23} - \beta|00\rangle_{23} + \gamma|11\rangle_{23} + \delta|10\rangle_{23}\Big]$$
$$= \alpha|00\rangle_{23} + \beta|01\rangle_{23} + \gamma|10\rangle_{23} + \delta|11\rangle_{23}$$

B.8. Pengukuran teleportasi dua qubit sembarang melalui keadaan gugus empat qubit dengan basis $\left|\phi_8\right\rangle_{ab14}$

$$\left(\left\langle\phi_8\right|_{ab14}\otimes I\right)\left|\Phi_2\right\rangle_{ab1234}=$$

$$\left(\frac{1}{2}\left[\left\langle 0001\right|+\left\langle 0100\right|+\left\langle 1011\right|-\left\langle 1110\right|\right]\otimes I\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}\left[\alpha\left|000000\right\rangle+\alpha\left|000011\right\rangle+\alpha\left|001100\right\rangle-\alpha\left|001111\right\rangle\right.\right.$$
$$+\beta\left|010000\right\rangle+\beta\left|010011\right\rangle+\beta\left|011100\right\rangle-\beta\left|011111\right\rangle$$
$$+\gamma\left|100000\right\rangle+\gamma\left|100011\right\rangle+\gamma\left|101100\right\rangle-\gamma\left|101111\right\rangle$$
$$\left.\left.+\delta\left|110000\right\rangle+\delta\left|110011\right\rangle+\delta\left|111100\right\rangle-\delta\left|111111\right\rangle\right]_{ab1234}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left[\alpha\left(\left\langle 0001\right|+\left\langle 0100\right|+\left\langle 1011\right|-\left\langle 1110\right|\right)_{ab14}\left|0000\right\rangle_{ab14}\otimes\left|00\right\rangle_{23}\right.$$
$$+\alpha\left(\left\langle 0001\right|+\left\langle 0100\right|+\left\langle 1011\right|-\left\langle 1110\right|\right)_{ab14}\left|0001\right\rangle_{ab14}\otimes\left|01\right\rangle_{23}$$
$$+\alpha\left(\left\langle 0001\right|+\left\langle 0100\right|+\left\langle 1011\right|-\left\langle 1110\right|\right)_{ab14}\left|0010\right\rangle_{ab14}\otimes\left|10\right\rangle_{23}$$
$$-\alpha\left(\left\langle 0001\right|+\left\langle 0100\right|+\left\langle 1011\right|-\left\langle 1110\right|\right)_{ab14}\left|0011\right\rangle_{ab14}\otimes\left|11\right\rangle_{23}$$
$$+\beta\left(\left\langle 0001\right|+\left\langle 0100\right|+\left\langle 1011\right|-\left\langle 1110\right|\right)_{ab14}\left|0100\right\rangle_{ab14}\otimes\left|00\right\rangle_{23}$$
$$+\beta\left(\left\langle 0001\right|+\left\langle 0100\right|+\left\langle 1011\right|-\left\langle 1110\right|\right)_{ab14}\left|0101\right\rangle_{ab14}\otimes\left|01\right\rangle_{23}$$
$$+\beta\left(\left\langle 0001\right|+\left\langle 0100\right|+\left\langle 1011\right|-\left\langle 1110\right|\right)_{ab14}\left|0110\right\rangle_{ab14}\otimes\left|10\right\rangle_{23}$$
$$-\beta\left(\left\langle 0001\right|+\left\langle 0100\right|+\left\langle 1011\right|-\left\langle 1110\right|\right)_{ab14}\left|0111\right\rangle_{ab14}\otimes\left|11\right\rangle_{23}$$

$$+\gamma\left(\langle 0001| + \langle 0100| + \langle 1011| - \langle 1110|\right)_{ab14} |1000\rangle_{ab14} \otimes |00\rangle_{23}$$
$$+\gamma\left(\langle 0001| + \langle 0100| + \langle 1011| - \langle 1110|\right)_{ab14} |1001\rangle_{ab14} \otimes |01\rangle_{23}$$
$$+\gamma\left(\langle 0001| + \langle 0100| + \langle 1011| - \langle 1110|\right)_{ab14} |1010\rangle_{ab14} \otimes |10\rangle_{23}$$
$$-\gamma\left(\langle 0001| + \langle 0100| + \langle 1011| - \langle 1110|\right)_{ab14} |1011\rangle_{ab14} \otimes |11\rangle_{23}$$
$$+\delta\left(\langle 0001| + \langle 0100| + \langle 1011| - \langle 1110|\right)_{ab14} |1100\rangle_{ab14} \otimes |00\rangle_{23}$$
$$+\delta\left(\langle 0001| + \langle 0100| + \langle 1011| - \langle 1110|\right)_{ab14} |1101\rangle_{ab14} \otimes |01\rangle_{23}$$
$$+\delta\left(\langle 0001| + \langle 0100| + \langle 1011| - \langle 1110|\right)_{ab14} |1110\rangle_{ab14} \otimes |10\rangle_{23}$$
$$-\delta\left(\langle 0001| + \langle 0100| + \langle 1011| - \langle 1110|\right)_{ab14} |1111\rangle_{ab14} \otimes |11\rangle_{23} \Big]$$
$$= \frac{1}{4}\Big[\alpha|01\rangle_{23} + \beta|00\rangle_{23} - \gamma|11\rangle_{23} - \delta|10\rangle_{23}\Big]$$

Sehingga agar Bob menerima keadaan yang sama dengan keadaan yang dikirim oleh Alice, Bob harus melakukan operator rotasi $2\sigma_x \otimes 2\sigma_x$ dari kiri.

$$2\sigma_x \otimes 2\sigma_x \left(\langle \phi_8|_{ab14} \otimes I\right)|\Phi_2\rangle_{ab1234}$$
$$= 2\sigma_x \otimes 2\sigma_x \frac{1}{4}\Big[\alpha|01\rangle_{23} + \beta|00\rangle_{23} - \gamma|11\rangle_{23} - \delta|10\rangle_{23}\Big]$$
$$= \alpha|00\rangle_{23} + \beta|01\rangle_{23} + \gamma|10\rangle_{23} + \delta|11\rangle_{23}$$

B.9. Pengukuran teleportasi dua qubit sembarang melalui keadaan gugus empat qubit dengan basis $\left|\phi_9\right\rangle_{ab14}$

$$\left(\left\langle\phi_9\right|_{ab14} \otimes I\right)\left|\Phi_2\right\rangle_{ab1234} =$$

$$\left(\frac{1}{2}\left[\langle 0010| - \langle 0111| + \langle 1000| + \langle 1101|\right] \otimes I\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}\left[\alpha|000000\rangle + \alpha|000011\rangle + \alpha|001100\rangle - \alpha|001111\rangle\right.\right.$$
$$+\beta|010000\rangle + \beta|010011\rangle + \beta|011100\rangle - \beta|011111\rangle$$
$$+\gamma|100000\rangle + \gamma|100011\rangle + \gamma|101100\rangle - \gamma|101111\rangle$$
$$\left.\left.+\delta|110000\rangle + \delta|110011\rangle + \delta|111100\rangle - \delta|111111\rangle\right]_{ab1234}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left[\alpha\left(\langle 0010| + \langle 0111| + \langle 1000| - \langle 1101|\right)_{ab14}|0000\rangle_{ab14} \otimes |00\rangle_{23}\right.$$
$$+\alpha\left(\langle 0010| + \langle 0111| + \langle 1000| - \langle 1101|\right)_{ab14}|0001\rangle_{ab14} \otimes |01\rangle_{23}$$
$$+\alpha\left(\langle 0010| + \langle 0111| + \langle 1000| - \langle 1101|\right)_{ab14}|0010\rangle_{ab14} \otimes |10\rangle_{23}$$
$$-\alpha\left(\langle 0010| + \langle 0111| + \langle 1000| - \langle 1101|\right)_{ab14}|0011\rangle_{ab14} \otimes |11\rangle_{23}$$
$$+\beta\left(\langle 0010| + \langle 0111| + \langle 1000| - \langle 1101|\right)_{ab14}|0100\rangle_{ab14} \otimes |00\rangle_{23}$$
$$+\beta\left(\langle 0010| + \langle 0111| + \langle 1000| - \langle 1101|\right)_{ab14}|0101\rangle_{ab14} \otimes |01\rangle_{23}$$
$$+\beta\left(\langle 0010| + \langle 0111| + \langle 1000| - \langle 1101|\right)_{ab14}|0110\rangle_{ab14} \otimes |10\rangle_{23}$$
$$-\beta\left(\langle 0010| + \langle 0111| + \langle 1000| - \langle 1101|\right)_{ab14}|0111\rangle_{ab14} \otimes |11\rangle_{23}$$

$$+\gamma\left(\langle 0010| + \langle 0111| + \langle 1000| - \langle 1101|\right)_{ab14} |1000\rangle_{ab14} \otimes |00\rangle_{23}$$
$$+\gamma\left(\langle 0010| + \langle 0111| + \langle 1000| - \langle 1101|\right)_{ab14} |1001\rangle_{ab14} \otimes |01\rangle_{23}$$
$$+\gamma\left(\langle 0010| + \langle 0111| + \langle 1000| - \langle 1101|\right)_{ab14} |1010\rangle_{ab14} \otimes |10\rangle_{23}$$
$$-\gamma\left(\langle 0010| + \langle 0111| + \langle 1000| - \langle 1101|\right)_{ab14} |1011\rangle_{ab14} \otimes |11\rangle_{23}$$
$$+\delta\left(\langle 0010| + \langle 0111| + \langle 1000| - \langle 1101|\right)_{ab14} |1100\rangle_{ab14} \otimes |00\rangle_{23}$$
$$+\delta\left(\langle 0010| + \langle 0111| + \langle 1000| - \langle 1101|\right)_{ab14} |1101\rangle_{ab14} \otimes |01\rangle_{23}$$
$$+\delta\left(\langle 0010| + \langle 0111| + \langle 1000| - \langle 1101|\right)_{ab14} |1110\rangle_{ab14} \otimes |10\rangle_{23}$$
$$-\delta\left(\langle 0010| + \langle 0111| + \langle 1000| - \langle 1101|\right)_{ab14} |1111\rangle_{ab14} \otimes |11\rangle_{23} \Big]$$
$$= \frac{1}{4}\left[\alpha|10\rangle_{23} + \beta|11\rangle_{23} - \gamma|00\rangle_{23} - \delta|01\rangle_{23}\right]$$

Sehingga agar Bob menerima keadaan yang sama dengan keadaan yang dikirim oleh Alice, Bob harus melakukan operator rotasi $2\sigma_x \otimes 2I$ dari kiri.

$$2\sigma_x \otimes 2I\left(\langle \phi_9|_{ab14} \otimes I\right)|\Phi_2\rangle_{ab1234}$$
$$= 2\sigma_x \otimes 2I\,\frac{1}{4}\left[\alpha|10\rangle_{23} + \beta|11\rangle_{23} - \gamma|00\rangle_{23} - \delta|01\rangle_{23}\right]$$
$$= \alpha|00\rangle_{23} + \beta|01\rangle_{23} + \gamma|10\rangle_{23} + \delta|11\rangle_{23}$$

B.10. Pengukuran teleportasi dua qubit sembarang melalui keadaan gugus empat qubit dengan basis $\left|\phi_{10}\right\rangle_{ab14}$

$$\left(\left\langle\phi_{10}\right|_{ab14} \otimes I\right)\left|\Phi_2\right\rangle_{ab1234} =$$

$$\left(\frac{1}{2}\left[\left\langle 0010\right| + \left\langle 0111\right| - \left\langle 1000\right| + \left\langle 1101\right|\right] \otimes I\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}\left[\alpha\left|000000\right\rangle + \alpha\left|000011\right\rangle + \alpha\left|001100\right\rangle - \alpha\left|001111\right\rangle\right.\right.$$

$$+\beta\left|010000\right\rangle + \beta\left|010011\right\rangle + \beta\left|011100\right\rangle - \beta\left|011111\right\rangle$$

$$+\gamma\left|100000\right\rangle + \gamma\left|100011\right\rangle + \gamma\left|101100\right\rangle - \gamma\left|101111\right\rangle$$

$$\left.\left.+\delta\left|110000\right\rangle + \delta\left|110011\right\rangle + \delta\left|111100\right\rangle - \delta\left|111111\right\rangle\right]_{ab1234}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left[\alpha\left(\left\langle 0010\right| + \left\langle 0111\right| - \left\langle 1000\right| + \left\langle 1101\right|\right)_{ab14}\left|0000\right\rangle_{ab14} \otimes \left|00\right\rangle_{23}\right.$$

$$+\alpha\left(\left\langle 0010\right| + \left\langle 0111\right| - \left\langle 1000\right| + \left\langle 1101\right|\right)_{ab14}\left|0001\right\rangle_{ab14} \otimes \left|01\right\rangle_{23}$$

$$+\alpha\left(\left\langle 0010\right| + \left\langle 0111\right| - \left\langle 1000\right| + \left\langle 1101\right|\right)_{ab14}\left|0010\right\rangle_{ab14} \otimes \left|10\right\rangle_{23}$$

$$-\alpha\left(\left\langle 0010\right| + \left\langle 0111\right| - \left\langle 1000\right| + \left\langle 1101\right|\right)_{ab14}\left|0011\right\rangle_{ab14} \otimes \left|11\right\rangle_{23}$$

$$+\beta\left(\left\langle 0010\right| + \left\langle 0111\right| - \left\langle 1000\right| + \left\langle 1101\right|\right)_{ab14}\left|0100\right\rangle_{ab14} \otimes \left|00\right\rangle_{23}$$

$$+\beta\left(\left\langle 0010\right| + \left\langle 0111\right| - \left\langle 1000\right| + \left\langle 1101\right|\right)_{ab14}\left|0101\right\rangle_{ab14} \otimes \left|01\right\rangle_{23}$$

$$+\beta\left(\left\langle 0010\right| + \left\langle 0111\right| - \left\langle 1000\right| + \left\langle 1101\right|\right)_{ab14}\left|0110\right\rangle_{ab14} \otimes \left|10\right\rangle_{23}$$

$$-\beta\left(\left\langle 0010\right| + \left\langle 0111\right| - \left\langle 1000\right| + \left\langle 1101\right|\right)_{ab14}\left|0111\right\rangle_{ab14} \otimes \left|11\right\rangle_{23}$$

$$+\gamma\left(\langle 0010|+\langle 0111|-\langle 1000|+\langle 1101|\right)_{ab14}|1000\rangle_{ab14}\otimes|00\rangle_{23}$$
$$+\gamma\left(\langle 0010|+\langle 0111|-\langle 1000|+\langle 1101|\right)_{ab14}|1001\rangle_{ab14}\otimes|01\rangle_{23}$$
$$+\gamma\left(\langle 0010|+\langle 0111|-\langle 1000|+\langle 1101|\right)_{ab14}|1010\rangle_{ab14}\otimes|10\rangle_{23}$$
$$-\gamma\left(\langle 0010|+\langle 0111|-\langle 1000|+\langle 1101|\right)_{ab14}|1011\rangle_{ab14}\otimes|11\rangle_{23}$$
$$+\delta\left(\langle 0010|+\langle 0111|-\langle 1000|+\langle 1101|\right)_{ab14}|1100\rangle_{ab14}\otimes|00\rangle_{23}$$
$$+\delta\left(\langle 0010|+\langle 0111|-\langle 1000|+\langle 1101|\right)_{ab14}|1101\rangle_{ab14}\otimes|01\rangle_{23}$$
$$+\delta\left(\langle 0010|+\langle 0111|-\langle 1000|+\langle 1101|\right)_{ab14}|1110\rangle_{ab14}\otimes|10\rangle_{23}$$
$$-\delta\left(\langle 0010|+\langle 0111|-\langle 1000|+\langle 1101|\right)_{ab14}|1111\rangle_{ab14}\otimes|11\rangle_{23}\Big]$$
$$=\frac{1}{4}\left[\alpha|10\rangle_{23}-\beta|11\rangle_{23}-\gamma|00\rangle_{23}+\delta|01\rangle_{23}\right]$$

Sehingga agar Bob menerima keadaan yang sama dengan keadaan yang dikirim oleh Alice, Bob harus melakukan operator rotasi $2i\sigma_y\otimes 2\sigma_z$ dari kiri

$$2i\sigma_y\otimes 2\sigma_z\left(\langle\phi_{10}|_{ab14}\otimes I\right)|\Phi_2\rangle_{ab1234}$$
$$=2i\sigma_y\otimes 2\sigma_z\,\frac{1}{4}\left[\alpha|10\rangle_{23}-\beta|11\rangle_{23}-\gamma|00\rangle_{23}+\delta|01\rangle_{23}\right]$$
$$=\alpha|00\rangle_{23}+\beta|01\rangle_{23}+\gamma|10\rangle_{23}+\delta|11\rangle_{23}$$

B.11. Pengukuran teleportasi dua qubit sembarang melalui keadaan gugus empat qubit dengan basis $\left|\phi_{11}\right\rangle_{ab14}$

$$\left(\left\langle\phi_{11}\right|_{ab14}\otimes I\right)\left|\Phi_2\right\rangle_{ab1234}=$$

$$\left(\frac{1}{2}\left[\left\langle 0010\right|+\left\langle 0111\right|+\left\langle 1000\right|-\left\langle 1101\right|\right]\otimes I\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}\left[\alpha\left|000000\right\rangle+\alpha\left|000011\right\rangle+\alpha\left|001100\right\rangle-\alpha\left|001111\right\rangle\right.\right.$$
$$+\beta\left|010000\right\rangle+\beta\left|010011\right\rangle+\beta\left|011100\right\rangle-\beta\left|011111\right\rangle$$
$$+\gamma\left|100000\right\rangle+\gamma\left|100011\right\rangle+\gamma\left|101100\right\rangle-\gamma\left|101111\right\rangle$$
$$\left.\left.+\delta\left|110000\right\rangle+\delta\left|110011\right\rangle+\delta\left|111100\right\rangle-\delta\left|111111\right\rangle\right]_{ab1234}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left[\alpha\left(\left\langle 0010\right|+\left\langle 0111\right|+\left\langle 1000\right|-\left\langle 1101\right|\right)_{ab14}\left|0000\right\rangle_{ab14}\otimes\left|00\right\rangle_{23}\right.$$
$$+\alpha\left(\left\langle 0010\right|+\left\langle 0111\right|+\left\langle 1000\right|-\left\langle 1101\right|\right)_{ab14}\left|0001\right\rangle_{ab14}\otimes\left|01\right\rangle_{23}$$
$$+\alpha\left(\left\langle 0010\right|+\left\langle 0111\right|+\left\langle 1000\right|-\left\langle 1101\right|\right)_{ab14}\left|0010\right\rangle_{ab14}\otimes\left|10\right\rangle_{23}$$
$$-\alpha\left(\left\langle 0010\right|+\left\langle 0111\right|+\left\langle 1000\right|-\left\langle 1101\right|\right)_{ab14}\left|0011\right\rangle_{ab14}\otimes\left|11\right\rangle_{23}$$
$$+\beta\left(\left\langle 0010\right|+\left\langle 0111\right|+\left\langle 1000\right|-\left\langle 1101\right|\right)_{ab14}\left|0100\right\rangle_{ab14}\otimes\left|00\right\rangle_{23}$$
$$+\beta\left(\left\langle 0010\right|+\left\langle 0111\right|+\left\langle 1000\right|-\left\langle 1101\right|\right)_{ab14}\left|0101\right\rangle_{ab14}\otimes\left|01\right\rangle_{23}$$
$$+\beta\left(\left\langle 0010\right|+\left\langle 0111\right|+\left\langle 1000\right|-\left\langle 1101\right|\right)_{ab14}\left|0110\right\rangle_{ab14}\otimes\left|10\right\rangle_{23}$$
$$-\beta\left(\left\langle 0010\right|+\left\langle 0111\right|+\left\langle 1000\right|-\left\langle 1101\right|\right)_{ab14}\left|0111\right\rangle_{ab14}\otimes\left|11\right\rangle_{23}$$

$$+\gamma\left(\langle 0010| + \langle 0111| + \langle 1000| - \langle 1101|\right)_{ab14} |1000\rangle_{ab14} \otimes |00\rangle_{23}$$
$$+\gamma\left(\langle 0010| + \langle 0111| + \langle 1000| - \langle 1101|\right)_{ab14} |1001\rangle_{ab14} \otimes |01\rangle_{23}$$
$$+\gamma\left(\langle 0010| + \langle 0111| + \langle 1000| - \langle 1101|\right)_{ab14} |1010\rangle_{ab14} \otimes |10\rangle_{23}$$
$$-\gamma\left(\langle 0010| + \langle 0111| + \langle 1000| - \langle 1101|\right)_{ab14} |1011\rangle_{ab14} \otimes |11\rangle_{23}$$
$$+\delta\left(\langle 0010| + \langle 0111| + \langle 1000| - \langle 1101|\right)_{ab14} |1100\rangle_{ab14} \otimes |00\rangle_{23}$$
$$+\delta\left(\langle 0010| + \langle 0111| + \langle 1000| - \langle 1101|\right)_{ab14} |1101\rangle_{ab14} \otimes |01\rangle_{23}$$
$$+\delta\left(\langle 0010| + \langle 0111| + \langle 1000| - \langle 1101|\right)_{ab14} |1110\rangle_{ab14} \otimes |10\rangle_{23}$$
$$-\delta\left(\langle 0010| + \langle 0111| + \langle 1000| - \langle 1101|\right)_{ab14} |1111\rangle_{ab14} \otimes |11\rangle_{23}\Big]$$
$$= \frac{1}{4}\left[\alpha|10\rangle_{23} - \beta|11\rangle_{23} + \gamma|00\rangle_{23} - \delta|01\rangle_{23}\right]$$

Sehingga agar Bob menerima keadaan yang sama dengan keadaan yang dikirim oleh Alice, Bob harus melakukan operator rotasi $2\sigma_x \otimes 2\sigma_z$ dari kiri

$$2\sigma_x \otimes 2\sigma_z \left(\langle\phi_{11}|_{ab14} \otimes I\right)|\Phi_2\rangle_{ab1234}$$
$$= 2\sigma_x \otimes 2\sigma_z \frac{1}{4}\left[\alpha|10\rangle_{23} - \beta|11\rangle_{23} + \gamma|00\rangle_{23} - \delta|01\rangle_{23}\right]$$
$$= \alpha|00\rangle_{23} + \beta|01\rangle_{23} + \gamma|10\rangle_{23} + \delta|11\rangle_{23}$$

B.12. Pengukuran teleportasi dua qubit sembarang melalui keadaan gugus empat qubit dengan basis $\left|\phi_{12}\right\rangle_{ab14}$

$$\left(\left\langle\phi_{12}\right|_{ab14}\otimes I\right)\left|\Phi_2\right\rangle_{ab1234}=$$

$$\left(\frac{1}{2}\left[\left\langle 0010\right|-\left\langle 0111\right|-\left\langle 1000\right|-\left\langle 1101\right|\right]\otimes I\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}\left[\alpha\left|000000\right\rangle+\alpha\left|000011\right\rangle+\alpha\left|001100\right\rangle-\alpha\left|001111\right\rangle\right.\right.$$
$$+\beta\left|010000\right\rangle+\beta\left|010011\right\rangle+\beta\left|011100\right\rangle-\beta\left|011111\right\rangle$$
$$+\gamma\left|100000\right\rangle+\gamma\left|100011\right\rangle+\gamma\left|101100\right\rangle-\gamma\left|101111\right\rangle$$
$$\left.\left.+\delta\left|110000\right\rangle+\delta\left|110011\right\rangle+\delta\left|111100\right\rangle-\delta\left|111111\right\rangle\right]_{ab1234}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left[\alpha\left(\left\langle 0010\right|-\left\langle 0111\right|-\left\langle 1000\right|-\left\langle 1101\right|\right)_{ab14}\left|0000\right\rangle_{ab14}\otimes\left|00\right\rangle_{23}\right.$$
$$+\alpha\left(\left\langle 0010\right|-\left\langle 0111\right|-\left\langle 1000\right|-\left\langle 1101\right|\right)_{ab14}\left|0001\right\rangle_{ab14}\otimes\left|01\right\rangle_{23}$$
$$+\alpha\left(\left\langle 0010\right|-\left\langle 0111\right|-\left\langle 1000\right|-\left\langle 1101\right|\right)_{ab14}\left|0010\right\rangle_{ab14}\otimes\left|10\right\rangle_{23}$$
$$-\alpha\left(\left\langle 0010\right|-\left\langle 0111\right|-\left\langle 1000\right|-\left\langle 1101\right|\right)_{ab14}\left|0011\right\rangle_{ab14}\otimes\left|11\right\rangle_{23}$$
$$+\beta\left(\left\langle 0010\right|-\left\langle 0111\right|-\left\langle 1000\right|-\left\langle 1101\right|\right)_{ab14}\left|0100\right\rangle_{ab14}\otimes\left|00\right\rangle_{23}$$
$$+\beta\left(\left\langle 0010\right|-\left\langle 0111\right|-\left\langle 1000\right|-\left\langle 1101\right|\right)_{ab14}\left|0101\right\rangle_{ab14}\otimes\left|01\right\rangle_{23}$$
$$+\beta\left(\left\langle 0010\right|-\left\langle 0111\right|-\left\langle 1000\right|-\left\langle 1101\right|\right)_{ab14}\left|0110\right\rangle_{ab14}\otimes\left|10\right\rangle_{23}$$
$$-\beta\left(\left\langle 0010\right|-\left\langle 0111\right|-\left\langle 1000\right|-\left\langle 1101\right|\right)_{ab14}\left|0111\right\rangle_{ab14}\otimes\left|11\right\rangle_{23}$$

$$+\gamma\left(\langle 0010| - \langle 0111| - \langle 1000| - \langle 1101|\right)_{ab14}|1000\rangle_{ab14}\otimes|00\rangle_{23}$$
$$+\gamma\left(\langle 0010| - \langle 0111| - \langle 1000| - \langle 1101|\right)_{ab14}|1001\rangle_{ab14}\otimes|01\rangle_{23}$$
$$+\gamma\left(\langle 0010| - \langle 0111| - \langle 1000| - \langle 1101|\right)_{ab14}|1010\rangle_{ab14}\otimes|10\rangle_{23}$$
$$-\gamma\left(\langle 0010| - \langle 0111| - \langle 1000| - \langle 1101|\right)_{ab14}|1011\rangle_{ab14}\otimes|11\rangle_{23}$$
$$+\delta\left(\langle 0010| - \langle 0111| - \langle 1000| - \langle 1101|\right)_{ab14}|1100\rangle_{ab14}\otimes|00\rangle_{23}$$
$$+\delta\left(\langle 0010| - \langle 0111| - \langle 1000| - \langle 1101|\right)_{ab14}|1101\rangle_{ab14}\otimes|01\rangle_{23}$$
$$+\delta\left(\langle 0010| - \langle 0111| - \langle 1000| - \langle 1101|\right)_{ab14}|1110\rangle_{ab14}\otimes|10\rangle_{23}$$
$$-\delta\left(\langle 0010| - \langle 0111| - \langle 1000| - \langle 1101|\right)_{ab14}|1111\rangle_{ab14}\otimes|11\rangle_{23}\Big]$$
$$=\frac{1}{4}\left[\alpha|10\rangle_{23}+\beta|11\rangle_{23}-\gamma|00\rangle_{23}-\delta|01\rangle_{23}\right]$$

Sehingga agar Bob menerima keadaan yang sama dengan keadaan yang dikirim oleh Alice, Bob harus melakukan operator rotasi $2i\sigma_y \otimes 2I$ dari kiri

$$2i\sigma_y \otimes 2I\left(\langle\phi_{10}|_{ab14}\otimes I\right)|\Phi_2\rangle_{ab1234}$$
$$=2i\sigma_y \otimes 2I\,\frac{1}{4}\left[\alpha|10\rangle_{23}+\beta|11\rangle_{23}-\gamma|00\rangle_{23}-\delta|01\rangle_{23}\right]$$
$$=\alpha|00\rangle_{23}+\beta|01\rangle_{23}+\gamma|10\rangle_{23}+\delta|11\rangle_{23}$$

B.13. Pengukuran teleportasi dua qubit sembarang melalui keadaan gugus empat qubit dengan basis $|\phi_{13}\rangle_{ab14}$

$$\left(\langle\phi_{13}|_{ab14}\otimes I\right)|\Phi_2\rangle_{ab1234} =$$

$$\left(\frac{1}{2}\left[-\langle 0011|+\langle 0110|+\langle 1001|+\langle 1100|\right]\otimes I\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}\left[\alpha|000000\rangle+\alpha|000011\rangle+\alpha|001100\rangle-\alpha|001111\rangle\right.\right.$$
$$+\beta|010000\rangle+\beta|010011\rangle+\beta|011100\rangle-\beta|011111\rangle$$
$$+\gamma|100000\rangle+\gamma|100011\rangle+\gamma|101100\rangle-\gamma|101111\rangle$$
$$\left.\left.+\delta|110000\rangle+\delta|110011\rangle+\delta|111100\rangle-\delta|111111\rangle\right]_{ab1234}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left[\alpha\left(-\langle 0011|+\langle 0110|+\langle 1001|+\langle 1100|\right)_{ab14}|0000\rangle_{ab14}\otimes|00\rangle_{23}\right.$$
$$+\alpha\left(-\langle 0011|+\langle 0110|+\langle 1001|+\langle 1100|\right)_{ab14}|0001\rangle_{ab14}\otimes|01\rangle_{23}$$
$$+\alpha\left(-\langle 0011|+\langle 0110|+\langle 1001|+\langle 1100|\right)_{ab14}|0010\rangle_{ab14}\otimes|10\rangle_{23}$$
$$-\alpha\left(-\langle 0011|+\langle 0110|+\langle 1001|+\langle 1100|\right)_{ab14}|0011\rangle_{ab14}\otimes|11\rangle_{23}$$
$$+\beta\left(-\langle 0011|+\langle 0110|+\langle 1001|+\langle 1100|\right)_{ab14}|0100\rangle_{ab14}\otimes|00\rangle_{23}$$
$$+\beta\left(-\langle 0011|+\langle 0110|+\langle 1001|+\langle 1100|\right)_{ab14}|0101\rangle_{ab14}\otimes|01\rangle_{23}$$
$$+\beta\left(-\langle 0011|+\langle 0110|+\langle 1001|+\langle 1100|\right)_{ab14}|0110\rangle_{ab14}\otimes|10\rangle_{23}$$
$$-\beta\left(-\langle 0011|+\langle 0110|+\langle 1001|+\langle 1100|\right)_{ab14}|0111\rangle_{ab14}\otimes|11\rangle_{23}$$

$$+\gamma\left(-\langle 0011|+\langle 0110|+\langle 1001|+\langle 1100|\right)_{ab14}|1000\rangle_{ab14}\otimes|00\rangle_{23}$$
$$+\gamma\left(-\langle 0011|+\langle 0110|+\langle 1001|+\langle 1100|\right)_{ab14}|1001\rangle_{ab14}\otimes|01\rangle_{23}$$
$$+\gamma\left(-\langle 0011|+\langle 0110|+\langle 1001|+\langle 1100|\right)_{ab14}|1010\rangle_{ab14}\otimes|10\rangle_{23}$$
$$-\gamma\left(-\langle 0011|+\langle 0110|+\langle 1001|+\langle 1100|\right)_{ab14}|1011\rangle_{ab14}\otimes|11\rangle_{23}$$
$$+\delta\left(-\langle 0011|+\langle 0110|+\langle 1001|+\langle 1100|\right)_{ab14}|1100\rangle_{ab14}\otimes|00\rangle_{23}$$
$$+\delta\left(-\langle 0011|+\langle 0110|+\langle 1001|+\langle 1100|\right)_{ab14}|1101\rangle_{ab14}\otimes|01\rangle_{23}$$
$$+\delta\left(-\langle 0011|+\langle 0110|+\langle 1001|+\langle 1100|\right)_{ab14}|1110\rangle_{ab14}\otimes|10\rangle_{23}$$
$$-\delta\left(-\langle 0011|+\langle 0110|+\langle 1001|+\langle 1100|\right)_{ab14}|1111\rangle_{ab14}\otimes|11\rangle_{23}\Big]$$
$$=\frac{1}{4}\left[\alpha|11\rangle_{23}+\beta|10\rangle_{23}+\gamma|01\rangle_{23}+\delta|00\rangle_{23}\right]$$

Sehingga agar Bob menerima keadaan yang sama dengan keadaan yang dikirim oleh Alice, Bob harus melakukan operator rotasi $2\sigma_x\otimes 2\sigma_x$ dari kiri

$$2\sigma_x\otimes 2\sigma_x\left(\langle\phi_{10}|_{ab14}\otimes I\right)|\Phi_2\rangle_{ab1234}$$
$$=2\sigma_x\otimes 2\sigma_x\,\frac{1}{4}\left[\alpha|11\rangle_{23}+\beta|10\rangle_{23}+\gamma|01\rangle_{23}+\delta|00\rangle_{23}\right]$$
$$=\alpha|00\rangle_{23}+\beta|01\rangle_{23}+\gamma|10\rangle_{23}+\delta|11\rangle_{23}$$

B.14. Pengukuran teleportasi dua qubit sembarang melalui keadaan gugus empat qubit dengan basis $\left|\phi_{14}\right\rangle_{ab14}$

$$\left(\left\langle\phi_{14}\right|_{ab14}\otimes I\right)\left|\Phi_2\right\rangle_{ab1234}=$$

$$\left(\frac{1}{2}\left[-\langle 0011|-\langle 0110|-\langle 1001|+\langle 1100|\right]\otimes I\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}\left[\alpha|000000\rangle+\alpha|000011\rangle+\alpha|001100\rangle-\alpha|001111\rangle\right.\right.$$
$$+\beta|010000\rangle+\beta|010011\rangle+\beta|011100\rangle-\beta|011111\rangle$$
$$+\gamma|100000\rangle+\gamma|100011\rangle+\gamma|101100\rangle-\gamma|101111\rangle$$
$$\left.\left.+\delta|110000\rangle+\delta|110011\rangle+\delta|111100\rangle-\delta|111111\rangle\right]_{ab1234}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left[\alpha\left(-\langle 0011|-\langle 0110|-\langle 1001|+\langle 1100|\right)_{ab14}|0000\rangle_{ab14}\otimes|00\rangle_{23}\right.$$
$$+\alpha\left(-\langle 0011|-\langle 0110|-\langle 1001|+\langle 1100|\right)_{ab14}|0001\rangle_{ab14}\otimes|01\rangle_{23}$$
$$+\alpha\left(-\langle 0011|-\langle 0110|-\langle 1001|+\langle 1100|\right)_{ab14}|0010\rangle_{ab14}\otimes|10\rangle_{23}$$
$$-\alpha\left(-\langle 0011|-\langle 0110|-\langle 1001|+\langle 1100|\right)_{ab14}|0011\rangle_{ab14}\otimes|11\rangle_{23}$$
$$+\beta\left(-\langle 0011|-\langle 0110|-\langle 1001|+\langle 1100|\right)_{ab14}|0100\rangle_{ab14}\otimes|00\rangle_{23}$$
$$+\beta\left(-\langle 0011|-\langle 0110|-\langle 1001|+\langle 1100|\right)_{ab14}|0101\rangle_{ab14}\otimes|01\rangle_{23}$$
$$+\beta\left(-\langle 0011|-\langle 0110|-\langle 1001|+\langle 1100|\right)_{ab14}|0110\rangle_{ab14}\otimes|10\rangle_{23}$$
$$-\beta\left(-\langle 0011|-\langle 0110|-\langle 1001|+\langle 1100|\right)_{ab14}|0111\rangle_{ab14}\otimes|11\rangle_{23}$$

$$+\gamma\left(-\langle 0011|-\langle 0110|-\langle 1001|+\langle 1100|\right)_{ab14}|1000\rangle_{ab14}\otimes|00\rangle_{23}$$
$$+\gamma\left(-\langle 0011|-\langle 0110|-\langle 1001|+\langle 1100|\right)_{ab14}|1001\rangle_{ab14}\otimes|01\rangle_{23}$$
$$+\gamma\left(-\langle 0011|-\langle 0110|-\langle 1001|+\langle 1100|\right)_{ab14}|1010\rangle_{ab14}\otimes|10\rangle_{23}$$
$$-\gamma\left(-\langle 0011|-\langle 0110|-\langle 1001|+\langle 1100|\right)_{ab14}|1011\rangle_{ab14}\otimes|11\rangle_{23}$$
$$+\delta\left(-\langle 0011|-\langle 0110|-\langle 1001|+\langle 1100|\right)_{ab14}|1100\rangle_{ab14}\otimes|00\rangle_{23}$$
$$+\delta\left(-\langle 0011|-\langle 0110|-\langle 1001|+\langle 1100|\right)_{ab14}|1101\rangle_{ab14}\otimes|01\rangle_{23}$$
$$+\delta\left(-\langle 0011|-\langle 0110|-\langle 1001|+\langle 1100|\right)_{ab14}|1110\rangle_{ab14}\otimes|10\rangle_{23}$$
$$-\delta\left(-\langle 0011|-\langle 0110|-\langle 1001|+\langle 1100|\right)_{ab14}|1111\rangle_{ab14}\otimes|11\rangle_{23}\Big]$$
$$=\frac{1}{4}\left[\alpha|11\rangle_{23}-\beta|10\rangle_{23}-\gamma|01\rangle_{23}+\delta|00\rangle_{23}\right]$$

Sehingga agar Bob menerima keadaan yang sama dengan keadaan yang dikirim oleh Alice, Bob harus melakukan operator rotasi $2i\sigma_y\otimes 2i\sigma_y$ dari kiri.

$$2i\sigma_y\otimes 2i\sigma_y\left(\langle\phi_{14}|_{ab14}\otimes I\right)|\Phi_2\rangle_{ab1234}$$
$$=2i\sigma_y\otimes 2i\sigma_y\,\frac{1}{4}\left[\alpha|11\rangle_{23}-\beta|10\rangle_{23}-\gamma|01\rangle_{23}+\delta|00\rangle_{23}\right]$$
$$=\alpha|00\rangle_{23}+\beta|01\rangle_{23}+\gamma|10\rangle_{23}+\delta|11\rangle_{23}$$

B.15. Pengukuran teleportasi dua qubit sembarang melalui keadaan gugus empat qubit dengan basis $\left|\phi_{15}\right\rangle_{ab14}$

$$\left(\left\langle\phi_{15}\right|_{ab14}\otimes I\right)\left|\Phi_2\right\rangle_{ab1234}=$$

$$\left(\frac{1}{2}\left[-\langle 0011|-\langle 0110|+\langle 1001|-\langle 1100|\right]\otimes I\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}\left[\alpha|000000\rangle+\alpha|000011\rangle+\alpha|001100\rangle-\alpha|001111\rangle\right.\right.$$
$$+\beta|010000\rangle+\beta|010011\rangle+\beta|011100\rangle-\beta|011111\rangle$$
$$+\gamma|100000\rangle+\gamma|100011\rangle+\gamma|101100\rangle-\gamma|101111\rangle$$
$$\left.\left.+\delta|110000\rangle+\delta|110011\rangle+\delta|111100\rangle-\delta|111111\rangle\right]_{ab1234}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left[\alpha\left(-\langle 0011|-\langle 0110|+\langle 1001|-\langle 1100|\right)_{ab14}|0000\rangle_{ab14}\otimes|00\rangle_{23}\right.$$
$$+\alpha\left(-\langle 0011|-\langle 0110|+\langle 1001|-\langle 1100|\right)_{ab14}|0001\rangle_{ab14}\otimes|01\rangle_{23}$$
$$+\alpha\left(-\langle 0011|-\langle 0110|+\langle 1001|-\langle 1100|\right)_{ab14}|0010\rangle_{ab14}\otimes|10\rangle_{23}$$
$$-\alpha\left(-\langle 0011|-\langle 0110|+\langle 1001|-\langle 1100|\right)_{ab14}|0011\rangle_{ab14}\otimes|11\rangle_{23}$$
$$+\beta\left(-\langle 0011|-\langle 0110|+\langle 1001|-\langle 1100|\right)_{ab14}|0100\rangle_{ab14}\otimes|00\rangle_{23}$$
$$+\beta\left(-\langle 0011|-\langle 0110|+\langle 1001|-\langle 1100|\right)_{ab14}|0101\rangle_{ab14}\otimes|01\rangle_{23}$$
$$+\beta\left(-\langle 0011|-\langle 0110|+\langle 1001|-\langle 1100|\right)_{ab14}|0110\rangle_{ab14}\otimes|10\rangle_{23}$$
$$-\beta\left(-\langle 0011|-\langle 0110|+\langle 1001|-\langle 1100|\right)_{ab14}|0111\rangle_{ab14}\otimes|11\rangle_{23}$$

$$+\gamma\left(-\langle 0011|-\langle 0110|+\langle 1001|-\langle 1100|\right)_{ab14}|1000\rangle_{ab14}\otimes|00\rangle_{23}$$
$$+\gamma\left(-\langle 0011|-\langle 0110|+\langle 1001|-\langle 1100|\right)_{ab14}|1001\rangle_{ab14}\otimes|01\rangle_{23}$$
$$+\gamma\left(-\langle 0011|-\langle 0110|+\langle 1001|-\langle 1100|\right)_{ab14}|1010\rangle_{ab14}\otimes|10\rangle_{23}$$
$$-\gamma\left(-\langle 0011|-\langle 0110|+\langle 1001|-\langle 1100|\right)_{ab14}|1011\rangle_{ab14}\otimes|11\rangle_{23}$$
$$+\delta\left(-\langle 0011|-\langle 0110|+\langle 1001|-\langle 1100|\right)_{ab14}|1100\rangle_{ab14}\otimes|00\rangle_{23}$$
$$+\delta\left(-\langle 0011|-\langle 0110|+\langle 1001|-\langle 1100|\right)_{ab14}|1101\rangle_{ab14}\otimes|01\rangle_{23}$$
$$+\delta\left(-\langle 0011|-\langle 0110|+\langle 1001|-\langle 1100|\right)_{ab14}|1110\rangle_{ab14}\otimes|10\rangle_{23}$$
$$-\delta\left(-\langle 0011|-\langle 0110|+\langle 1001|-\langle 1100|\right)_{ab14}|1111\rangle_{ab14}\otimes|11\rangle_{23}\Big]$$
$$=\frac{1}{4}\left[\alpha|11\rangle_{23}-\beta|10\rangle_{23}+\gamma|01\rangle_{23}-\delta|00\rangle_{23}\right]$$

Sehingga agar Bob menerima keadaan yang sama dengan keadaan yang dikirim oleh Alice, Bob harus melakukan operator rotasi $2\sigma_x\otimes 2i\sigma_y$ dari kiri.

$$2\sigma_x\otimes 2i\sigma_y\left(\langle\phi_{15}|_{ab14}\otimes I\right)|\Phi_2\rangle_{ab1234}$$
$$=2\sigma_x\otimes 2i\sigma_y\,\frac{1}{4}\left[\alpha|11\rangle_{23}-\beta|10\rangle_{23}+\gamma|01\rangle_{23}-\delta|00\rangle_{23}\right]$$
$$=\alpha|00\rangle_{23}+\beta|01\rangle_{23}+\gamma|10\rangle_{23}+\delta|11\rangle_{23}$$

B.16. Pengukuran teleportasi dua qubit sembarang melalui keadaan gugus empat qubit dengan basis $\left|\phi_{16}\right\rangle_{ab14}$

$$\left(\left\langle\phi_{16}\right|_{ab14}\otimes I\right)\left|\Phi_2\right\rangle_{ab1234}=$$

$$\left(\frac{1}{2}\left[-\left\langle 0011\right|+\left\langle 0110\right|-\left\langle 1001\right|-\left\langle 1100\right|\right]\otimes I\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}\left[\alpha\left|000000\right\rangle+\alpha\left|000011\right\rangle+\alpha\left|001100\right\rangle-\alpha\left|001111\right\rangle\right.\right.$$

$$+\beta\left|010000\right\rangle+\beta\left|010011\right\rangle+\beta\left|011100\right\rangle-\beta\left|011111\right\rangle$$

$$+\gamma\left|100000\right\rangle+\gamma\left|100011\right\rangle+\gamma\left|101100\right\rangle-\gamma\left|101111\right\rangle$$

$$\left.\left.+\delta\left|110000\right\rangle+\delta\left|110011\right\rangle+\delta\left|111100\right\rangle-\delta\left|111111\right\rangle\right]_{ab1234}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left[\alpha\left(-\left\langle 0011\right|+\left\langle 0110\right|-\left\langle 1001\right|-\left\langle 1100\right|\right)_{ab14}\left|0000\right\rangle_{ab14}\otimes\left|00\right\rangle_{23}\right.$$

$$+\alpha\left(-\left\langle 0011\right|+\left\langle 0110\right|-\left\langle 1001\right|-\left\langle 1100\right|\right)_{ab14}\left|0001\right\rangle_{ab14}\otimes\left|01\right\rangle_{23}$$

$$+\alpha\left(-\left\langle 0011\right|+\left\langle 0110\right|-\left\langle 1001\right|-\left\langle 1100\right|\right)_{ab14}\left|0010\right\rangle_{ab14}\otimes\left|10\right\rangle_{23}$$

$$-\alpha\left(-\left\langle 0011\right|+\left\langle 0110\right|-\left\langle 1001\right|-\left\langle 1100\right|\right)_{ab14}\left|0011\right\rangle_{ab14}\otimes\left|11\right\rangle_{23}$$

$$+\beta\left(-\left\langle 0011\right|+\left\langle 0110\right|-\left\langle 1001\right|-\left\langle 1100\right|\right)_{ab14}\left|0100\right\rangle_{ab14}\otimes\left|00\right\rangle_{23}$$

$$+\beta\left(-\left\langle 0011\right|+\left\langle 0110\right|-\left\langle 1001\right|-\left\langle 1100\right|\right)_{ab14}\left|0101\right\rangle_{ab14}\otimes\left|01\right\rangle_{23}$$

$$+\beta\left(-\left\langle 0011\right|+\left\langle 0110\right|-\left\langle 1001\right|-\left\langle 1100\right|\right)_{ab14}\left|0110\right\rangle_{ab14}\otimes\left|10\right\rangle_{23}$$

$$-\beta\left(-\left\langle 0011\right|+\left\langle 0110\right|-\left\langle 1001\right|-\left\langle 1100\right|\right)_{ab14}\left|0111\right\rangle_{ab14}\otimes\left|11\right\rangle_{23}$$

$$+\gamma\left(-\langle 0011|+\langle 0110|-\langle 1001|-\langle 1100|\right)_{ab14}|1000\rangle_{ab14}\otimes|00\rangle_{23}$$
$$+\gamma\left(-\langle 0011|+\langle 0110|-\langle 1001|-\langle 1100|\right)_{ab14}|1001\rangle_{ab14}\otimes|01\rangle_{23}$$
$$+\gamma\left(-\langle 0011|+\langle 0110|-\langle 1001|-\langle 1100|\right)_{ab14}|1010\rangle_{ab14}\otimes|10\rangle_{23}$$
$$-\gamma\left(-\langle 0011|+\langle 0110|-\langle 1001|-\langle 1100|\right)_{ab14}|1011\rangle_{ab14}\otimes|11\rangle_{23}$$
$$+\delta\left(-\langle 0011|+\langle 0110|-\langle 1001|-\langle 1100|\right)_{ab14}|1100\rangle_{ab14}\otimes|00\rangle_{23}$$
$$+\delta\left(-\langle 0011|+\langle 0110|-\langle 1001|-\langle 1100|\right)_{ab14}|1101\rangle_{ab14}\otimes|01\rangle_{23}$$
$$+\delta\left(-\langle 0011|+\langle 0110|-\langle 1001|-\langle 1100|\right)_{ab14}|1110\rangle_{ab14}\otimes|10\rangle_{23}$$
$$-\delta\left(-\langle 0011|+\langle 0110|-\langle 1001|-\langle 1100|\right)_{ab14}|1111\rangle_{ab14}\otimes|11\rangle_{23}\Big]$$
$$=\frac{1}{4}\left[\alpha|11\rangle_{23}+\beta|10\rangle_{23}-\gamma|01\rangle_{23}-\delta|00\rangle_{23}\right]$$

Sehingga agar Bob menerima keadaan yang sama dengan keadaan yang dikirim oleh Alice, Bob harus melakukan operator rotasi $2i\sigma_y\otimes 2\sigma_x$ dari kiri

$$2i\sigma_y\otimes 2\sigma_x\left(\langle\phi_{16}|_{ab14}\otimes I\right)|\Phi_2\rangle_{ab1234}$$
$$=2i\sigma_y\otimes 2\sigma_x\frac{1}{4}\left[\alpha|11\rangle_{23}+\beta|10\rangle_{23}-\gamma|01\rangle_{23}-\delta|00\rangle_{23}\right]$$
$$=\alpha|00\rangle_{23}+\beta|01\rangle_{23}+\gamma|10\rangle_{23}+\delta|11\rangle_{23}$$

BIODATA

Penulis bernama Fasya Khuzaimah, dapat dipanggil Fasya. Penulis merupakan anak pertama dari tiga bersaudara yang dilahirkan di Bekasi, 28 Januari 1997. Ayah penulis bernama Wawan Rusdi Nurwanto, ibu penulis bernama Elin Herlina Caturiasasi, dan adik-adik penulis bernama Muhammad Fauzan Syahbana dan Fathna Khasheba. Saat ini tinggal di Griya Asri 2 Blok J 18 No 49 RT 03 RW 40, Desa Sumber Jaya, Kecamatan Tambun Selatan, Kabupaten Bekasi, Jawa Barat. Penulis telah menempuh pendidikan formal di TK IT Al-Fatihah, SDN Sumber Jaya 05, SMPN 1 Tambun Selatan, dan SMAN 1 Tambun Selatan. Pada tahun 2014, penulis menempuh perkuliahan di Departemen Fisika FIA ITS. Selama perkuliahan penulis aktif di organisasi Forum Studi Islam Fisika (FOSIF) pada periode 1436 H–1437 H dan 1437 H–1438 H sebagai Sekretaris Departement Ukhuwah Usaha dan Jamaah Masjid Manarul Ilmi (JMMI) ITS periode 1437 H-1438 H sebagai Mid Leader Akhwat Kajian Strategis, Islamic Press. Penulis pernah bergabung dalam berbagai kepanitiaan seperti 3rd Fiction, Ramadhan Di Kampus (RDK) 36, ITS Expo 2015, dan 4th Fiction. Aktifitas lainnya adalah sebagai Asisten Dosen untuk mata kuliah Fisika Dasar I dan Fisika Dasar II. Selain itu penulis juga membuka usaha kecil yaitu Date Art "Talenan Lukis". Prestasi yang pernah di raih adalah Finalis Lomba Menulis Esay Tingkat Nasional HIMASELVA ITB tahun 2015, lolos PKM terdanai 2016 dan 2017, dan publikasi internasional dalam AIP Publishing (https://doi.org/10.1063/14968385). Penulis berharap penelitian ini dapat bermanfaat dan dapat dikembangkan lebih lanjut. Kritik dan saran dapat dikirim ke khzfasya@gmail.com

" halaman ini sengaja dikosongkan "